Métodos Prácticos para obtener la Prima del Reaseguro de Stop Loss en el Seguro de Vida

Trabajo presentado para el V Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas, 1998

Ricardo Nava Ramírez y Tapen Sinha *

COMISIÓN NACIONAL DE SEGUROS Y FIANZAS
CNSF

V

Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas 1998

Segundo Lugar
Categoría de Seguros

SHCP

Reseña

El objetivo del presente trabajo consiste en mostrar algunos métodos técnicos que proponemos sean utilizados para obtener la Prima de Stop Loss en el Reaseguro de Vida y con ellos mostrar a la Compañía Aseguradora información suficiente para que elija aquella opción, en términos de la Prioridad y Capacidad del contrato de reaseguro, que optimice su utilidad. Adicionalmente se muestran resultados que explican el riesgo retenido por la Aseguradora y la Reaseguradora, estos resultados son valor esperado del monto acumulado de los siniestros, varianza retenida y cedida del monto acumulado de los siniestros, probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima neta retenida.

En tiempos pasados, debido a que no se contaba con el desarrollo computacional que tenemos actualmente, sólo se obtenía (en algunas ocasiones, se sigue obteniendo) una "aproximación" de la prima correcta a cobrar por el Reaseguro de Stopp Loss sin mostrar mayor información. Hoy en día, con el avence en computación y el desarrollo de la ciencia actuarial, consideramos que se deben mostrar resultados más precisos y completos, a fin de comprender y cuantificar mejor el riesgo asumido por cada una de las partes en el reaseguro de Stop Loss.

A continuación se muestra la estructura del presente trabajo:

Capítulo Uno

Se presenta una descripción de lo que es el reaseguro, la necesidad que tiene una Compañía Aseguradora para ceder parte del riesgo, las formas en las que la Compañía Reaseguradora satisface las necesidades de la Compañía Cedente. Se da una breve descripción de las formas más comunes de reaseguro que existen desde el punto de vista técnico y operativo. No se toca en detalle el reaseguro de Stop Loss sino hasta el segundo capítulo, sin embargo, algunos ejemplos que están incluidos en este capítulo han sido diseñados de manera introductoria a lo que es el Reaseguro de Stopp Loss.

Capítulo Dos

Se da una descripción de lo que es el Reaseguro de Stopp Loss, un breve repaso de las distribuciones de probabilidad a utilizar tanto para el número de siniestros como para el monto de los siniestros individuales, se describen métodos con los que se puede calcular el valor esperado de una parte truncada de una distribución compuesta, esto es, el valor esperado de los siniestros a cargo del asegurador y del reasegurador. Se describen también métodos para discretizar funciones continuas con el objetivo de poder utilizarlas después en el cálculo de la Prima de Stopp Loss. Por último, se muestran aproximaciones que pueden ser utilizadas para obtener las distribuciones compuestas.

Capítulo Tres

Con el objetivo de poder obtener la Prima de Stopp Loss y comprender mejor el riesgo asumido por la Aseguradora y Reaseguradora, en este capítulo se obtiene la varianza del monto acumulado de siniestros a cargo de ambas partes, se explica el papel que juega la covarianza de las variables que representan el monto de los siniestros a cargo del asegurador y reasegurador y se muestran ejemplos sencillos asumiendo que la distribución del monto acumulado de los siniestros es una función analitica conocida como es el caso de la distribución Exponencial o la distribución Uniforme.

Capítulo Cuatro

Finalmente, se presenta un ejemplo práctico de una cartera de vida individual con el objetivo de mostrar los resultados que se obtienen al utilizar diferentes métodos para calcular la prima de Stopp Loss, así como distintas distribuciones para el número y monto de los siniestros individuales para obtener la distribución compuesta del monto acumulado de los siniestros. En este mismo capítulo, se dan las conclusiones finales a manera de observaciones, que se obtuvieron a lo largo de este trabajo.

Capítulo Uno

¿Qué es el Reaseguro?

En este capítulo daremos una breve descripción de los elementos del seguro, qué es el reaseguro: orígenes, definición, necesidad y tipos de reaseguro que existen. Todo ello con un enfoque dentro del ramo de vida.

Al hablar de reaseguro resulta indispensable hablar primero de lo que es el seguro, ya que este es el origen de todo reaseguro. Es por esto que a continuación se mencionan cuáles son los elementos del seguro y con esto empezar a hacer el análisis de cuales son los riesgos que una compañía aseguradora corre al aceptar un riesgo y por lo tanto verse en la necesidad de reasegurarse.

1.1 Elementos del Seguro[1]

a) Pérdidas aleatorias financieras son enfrentadas por individuos y organizaciones.

b) El seguro puede aumentar la utilidad esperada de un consumidor que enfrente esas pérdidas.

c) Los sistemas de seguros son los únicos que ofrecen alivio contra pérdidas financieras en las cuales el número, tamaño o momento de ocurrencia es aleatoria y esa es la razón primaria de que existan estos sistemas.

d) Un sistema de seguros puede ser organizado sólo después de la identificación de situaciones donde las pérdidas aleatorias puedan ocurrir.

e) La palabra aleatoria significará que la frecuencia, tamaño o momento de la pérdida no este bajo el control posible del asegurado.

f) Si el asegurado tiene el control sobre la ocurrencia de la pérdida o si la reclamación excede la pérdida financiera, existirá un incentivo para que la pérdida ocurra. Bajo esta situación los sistemas de seguros son inválidos. En este caso el sistema de seguros no cumplirá con sus objetivos trazados de no disminuir las utilidades esperadas del asegurado y el asegurador.

g) Si las condiciones bajo las cuales las primas se cobran y los siniestros se pagan son diferentes de las hipótesis asumidas en las compañías, el sistema no cumplirá con sus objetivos trazados de no disminuir las utilidades esperadas del asegurado y el asegurador.

h) Cuando una clase de posible seguro ha sido identificado, debe obtenerse la información de las utilidades esperadas y del proceso de generación de la pérdida. Así, la investigación de mercados puede ser vista como un esfuerzo para aprender sobre las funciones de utilidades; es decir, las preferencias de los consumidores con respecto al riesgo.

---

[1] Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathemathics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 15, (traducción Act. Jorge Rendón)

i) La información experimentada en el pasado es en general suficientemente estable en el tiempo para ser utilizada en la planeación de un sistema de seguros.

j) Cuando se organiza un nuevo seguro, sus estadísticas relevantes pueden no conocerse. Sin embargo, información anterior sobre situaciones de riesgos similares puede ser obtenida para identificar el riesgo y otorgar estimaciones preliminares de las distribuciones de probabilidad necesarias para determinar las primas.

k) Como la mayoría de los sistemas de seguros operan bajo condiciones dinámicas, es importante que exista un programa que recoja y analice los datos bajo los que opera el seguro, de tal modo que el sistema de seguros pueda adaptarse a los cambios. La adaptación puede significar cambios en las primas, pago de dividendos o modificaciones de los futuros seguros.

l) En una economía competitiva, las fuerzas del mercado animarán a los aseguradores a cotizar pólizas, especialmente los seguros anuales, como si el valor esperado de las variables aleatorias no tuviera relación alguna con las desviaciones experimentadas.

m) Las desviaciones a los valores esperados no deben mostrar un patrón que pueda ser explotado por el asegurado o el asegurador para producir ganancias consistentemente. Esta clase de desviaciones indicarían ineficiencias en el mercado de seguros.

n) La clasificación de los riesgos en grupos homogéneos es una función importante en un mercado basado en sistemas de seguros. Las desviaciones aleatorias, identificables en una clase de seguros, indican eficiencias o equidades en la clasificación.

o) Es común que en un mercado de seguros competitivo, donde están interactuando numerosos compradores y vendedores se intente sacar ventaja de patrones de desviaciones que se perciben.

p) Como las pérdidas pueden resultar de eventos relativamente raros, es difícil identificar patrones no aleatorios, de esta forma el costo de la clasificación de la información en base a un sistema refinado de clasificación se justifica totalmente.

q) Para los sistemas de seguros organizados para servir a grupos, el problema aquí no es si las desviaciones ocurridas son aleatorias para los individuos, si las desviaciones experimentadas en el grupo son aleatorias. Así tenemos consistentemente desviaciones ocurridas con relación a las esperadas, ello nos indicaría la necesidad de revisar el sistema.

r) Asimismo, las desviaciones en la contratación de los seguros colectivos no se apoyan en la utilidad esperada de los individuos. En este caso, la decisión debe ser colectiva, de tal modo que el sistema de seguro aumente el bienestar general de la colectividad.

Por lo tanto, para que un sistema de seguros sea estable; es decir, para que las utilidades esperadas se cumplan o estén dentro de cierto rango “aceptable”, es recomendable que ciertas características se cumplan. Entre las más importantes podemos mencionar:

- Gran número de asegurados Dado que la prima que se cobra esta basada en la ley de los grandes números, nuestra confianza respecto al valor esperado del monto de los siniestros aumentará o será mayor si la población asegurada es grande.

- Valores a riesgo homogéneos Resulta obvio el hecho de que al tener mayor homogeneidad en las sumas aseguradas en riesgo, menor será la varianza que se tenga respecto al monto total de los siniestros.

- Bases de Cálculos Actuariales Adecuadas Las primas que se cobran deben estar basadas en información que contemple el aspecto dinámico del riesgo a cubrir. Muchas veces, no es posible contar con esta información y se tendrá que hacer una estimación conservadora.

- Documentos contractuales claros Es importante que los documentos contractuales reflejen las bases en las que se calcularon las primas, de no ser así, se podrían estar cubriendo riesgos de forma gratuita lo que implicaría una alta siniestralidad.

- Buena suscripción Aunque en la práctica es imposible eliminar por completo el riesgo de antiselección, el contar con una buena selección de riesgos ayudará a reducir la antiselección a un nivel aceptable.

1.2 Riesgos que corre una Aseguradora

Aún cuando todas las características mencionadas se cumplan, existen ciertos riesgos inherentes al seguro, entre los más importantes podemos mencionar:

- Riesgo por desvío en las bases demográficas. Un ejemplo claro de este riesgo se presenta cuando existen epidemias incontrolables que afectan a gran parte de la población asegurada y esto produce pérdidas tanto para las pólizas de vida como para las pólizas de gastos médicos.

- Riesgo por la acumulación de siniestros en un evento Otro factor de desequilibrio en una compañía aseguradora es la acumulación de siniestros que pueden verse afectados por un mismo evento catastrófico, tal es el caso de un terremoto, huracán o accidente aéreo. Este tipo de eventos causaría un gran desembolso a una compañía aseguradora lo que implica un gran problema financiero.

- Riesgo de Antiselección Se puede definir cuando el asegurado obtiene ventajas por condiciones contractuales generales o por cotizaciones no detalladas[2].

- Riesgo al experimentar un nuevo seguro Como se mencionó en la sección 1.1, al iniciar un nuevo seguro se experimenta con bases estadísticas similares que puedan representar el riesgo a cubrir; sin embargo, no se pueden tomar medidas demasiado conservadoras ya que se disminuirían las utilidades esperadas del asegurado.

[2] Rendón, Jorge; (1996) Políticas para la Administración del Seguro de Vida; pag. 58.

1.3 Varianza ocasionada por la heterogeneidad en Sumas Aseguradas

Aparte de todos estos riesgos que se han mencionado, existe otro riesgo al que se enfrenta una aseguradora, la varianza ocasionada por la heterogeneidad de las sumas aseguradas. Se puede estimar el número de siniestros que van a suceder en un año pero no se puede estimar con precisión el monto de los siniestros individuales en una cartera demasiado heterogénea. Este hecho puede causar problemas financieros a la compañía aseguradora. Para mostrar lo anterior, a continuación se presenta un ejemplo en donde el resultado puede variar significativamente debido a la heterogeneidad de la cartera cubierta.

Ejemplo 1.3

Caso a)
Imaginemos que se tiene una cartera de vida grupo, integrada por 1,000 personas, todas con suma asegurada de $200,000. Además supongamos que se cobra una prima de tarifa de 10‰, con 30% de recargo para gastos y utilidades, por lo que se puede presumir que la prima neta (siniestros esperados) es de 7‰.

Por lo tanto:

No. de personas Aseguradas: 1,000
Prima de tarifa recaudada: $ 2'000,000 = 1,000*200,000*.010
Número de siniestros: 7

Monto total de los siniestros: $ 1'400,000 = 7*200,000
Total de gastos: $ 600,000
Resultado final: 0

Bajo este supuesto de sumas aseguradas homogéneas y asumiendo además que las bases probabilísticas se apegaron exactamente a la realidad, el sistema ha funcionado perfectamente.

Caso b)
Cambiemos ahora el supuesto de sumas aseguradas homogéneas y asumamos una cartera compuesta de 1,000 personas que se distribuyen de acuerdo a su suma asegurada de la siguiente manera:

No. de Asegurados	Suma Asegurada
900	200,000
100	300,000

Entonces:

No. de Personas Aseguradas: 1,000
Prima de tarifa recaudada: $ 2'100,000
= 900*200,000*.010+100*300,000*.010

Supuesto i)

Supongamos que el monto de los siniestros se presenta de la siguiente manera:

No. de Siniestros	Monto de los siniestros individuales
6	300,000
1	200,000

Prima de tarifa recaudada: $ 2’100,000
Monto total de los siniestros: $ 2’000,000
Total de gastos: $ 630,000
Resultado final: -$ 530,000 (pérdida)

Supuesto ii)

Ahora bien, si la distribución de los siniestros se presentase de la siguiente forma:

No. de Siniestros	Monto de los siniestros individuales
7	200,000
0	300,000

Tenemos:

Prima de tarifa recaudada: $ 2’100,000 Monto
Total de los siniestros: $ 1’400,000
Total de gastos: $ 630,000
Resultado final: $ 70,000 (ganancia)

Con lo anterior hemos mostrado el riesgo que se corre al tener sumas aseguradas heterogéneas. El resultado final puede llegar a ser positivo o negativo dependiendo de los montos de los siniestros. Es importante notar el cambio en la varianza de la variable aleatoria que representa el monto total de siniestros en los dos casos del ejemplo anteriormente expuesto.

Para facilitar un poco los cálculos, imaginemos que sabemos que el número de siniestros fue 7, lo que es igual al valor esperado tomando en cuenta que la cartera consta de 1,000 personas y la prima neta es de 7%. De esta manera, las dos variables que determinan el monto total de siniestros que son: número de siniestros y monto de los siniestros individuales, se reducen únicamente a la última.

Si definimos a S como la variable aleatoria que representa el valor del monto acumulado de siniestros en la cartera, a T como la variable aleatoria que indica el número de siniestros cuyo monto es $200,000 y recordando que se ha fijado el número de siniestros (n) en 7, se puede obtener S de la siguiente forma:

$$S=\sum_{i=1}^{7} x_i \; = t(200{,}000) + (n\text{-}t)^*(300{,}000)$$

Donde:

$t =$ 0, 1, 2, … , 6, 7
$n =$ 7
x_i Representa el monto del siniestro i. Suponemos que las x_i son variables aleatorias independientes.

La función de densidad de t es:

$$f(t)=\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}$$

Donde:

$$p=\begin{cases}1 & \text{Caso a)}\\ 0.9 & \text{Caso b)}\end{cases}$$

La varianza de S se puede calcular de la siguiente manera:

$$Var(S)=E(S^2)-E^2(S)$$

Calculando para ambos casos, nos queda:

Caso	Esperanza de S	Varianza de S	Desv. Std. de S
a	1'400,000	0	0
b	1'470,000	6'300,000,000	79,373

Para el caso a), resulta obvio que la varianza de S sea cero ya que en este caso la variable que representa el monto de los siniestros individuales es una constante.

Cuanto menor sea la varianza en el monto de los siniestros mayor será el grado de precisión de obtener un resultado esperado, por lo que la Compañía Aseguradora buscará disminuir el riesgo de que las primas cobradas lleguen a ser insuficientes tratando de homogeneizar sus sumas aseguradas.

1.4 Reaseguro

En la práctica existen dos formas de lograr homogeneizar las sumas aseguradas, el Coaseguro y el Reaseguro. Dado que el objetivo principal de este trabajo es hablar del Reaseguro de Stop Loss, describiremos en esta sección lo que es el Reaseguro así como algunas modalidades de este, no tocando así, el tema del Coaseguro.

El reaseguro es una forma aseguradora de segundo grado, a través de cuyas diversas modalidades las entidades aseguradoras procuran homogeneizar y limitar las responsabilidades a su cargo, para normalizar el comportamiento de la cartera de riesgos asumidos, por medio de la cobertura de los desvíos o desequilibrios que afecten la frecuencia, la intensidad, la distribución temporal o la cuantía individual, de los siniestros que se produzcan de la misma.[3]

Visto de manera sencilla, podríamos decir que el reaseguro es asegurar lo ya asegurado. De esta forma algunos de los elementos del seguro mencionados en la sección 1.1 vuelven a reaparecer en el contrato de reaseguro. El principio de buena fe toma mayor jerarquía ya que se trata de un contrato entre "expertos".

1.4.1 El porqué del reaseguro

Con base en la definición que hemos dado, se podrían señalar los motivos por los que una compañía de seguros busca el reaseguro. Básicamente son dos las razones principales:

- Reducir la probabilidad de que el monto de los siniestros no sobrepase una cierta cantidad, estabilizando así los resultados.
- Aumentar su capacidad de suscripción a través del reaseguro.

A continuación se analizará la manera en que el reaseguro cumple con estas tareas. El siguiente ejemplo es una extensión del ejemplo 3.1, caso b), con los mismos supuestos.

a) Estabilización de resultados

Regresando al ejemplo 1.3, caso b). Supongamos que la compañía de seguros desea contratar un reaseguro de Stop Loss limitando así el riesgo a cubrir hasta un límite llamado Prioridad. En este caso, si el monto total de los siniestros sobrepasa la Prioridad, la Reaseguradora se hará responsable por el monto excedente.

Supongamos que la Prioridad ha sido determinada buscando limitar su siniestralidad al 95% de la prima neta cobrada ($1'470,000), por lo tanto, para este ejemplo podríamos asumir que la prioridad es igual a: ($1'470,000)·(0.95) ≈ $1'400,000.

El costo de reaseguro se determina tomando en cuenta la probabilidad de que el monto total de

[3] Ariel Fernández Dirube, Manual de Reaseguros, Biblioteca General Re., Volumen 2 (1993), pag. 28

los siniestros sobrepase esta prioridad.

Recordando que la variable aleatoria S que determina el monto de los siniestros se puede obtener de la siguiente manera:

$$S=\sum_{i=1}^{7} x_i = t(200{,}000) + (n-t)*(300{,}000)$$

Y la función de densidad t es:

$$f(t)=\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}$$

con n=7 y p=0.9

Entonces se tiene: Prioridad = $1'400,000.00

t	S	Monto total en exceso de la Prioridad (S - Prioridad)	Probabilidad de Ocurrencia f(t)	Producto (S - Prioridad)*f(t)
7	1'400,000	0	0.4782969	0.00
6	1'500,000	100,000	0.3720087	37,200.87
5	1'600,000	200,000	0.1240029	24,800.58
4	1'700,000	300,000	0.0229635	6,889.05
3	1'800,000	400,000	0.0025515	1,020.60
2	1'900,000	500,000	0.0001701	85.05
1	2'000,000	600,000	0.0000063	3.78
0	2'100,000	700,000	0.0000001	0.07
			1	70,000.00

Por lo tanto, la prima neta de reaseguro es: 70,000
De esta manera, los resultados que obtiene la compañía aseguradora son:
No. de Personas Aseguradas: 1,000
Prima de tarifa recaudada: $ 2'100,000
= 900*200,000*.010+100*300,000*.010
No. de Siniestros: 7
Monto total de los siniestros retenidos: $ 1'400,000
Costo del reaseguro: $ 70,000
Total de gastos: $ 630,000
Resultado final: 0

Supongamos que el recargo por desviación en siniestralidad y los gastos del reasegurador ya están incluidos en los $ 630,000 registrados como "total de gastos".

La compañía aseguradora ha cedido parte del riesgo estabilizando así los resultados, de esta manera la compañía obtiene una seguridad en cuanto a las utilidades mínimas que puede obtener.

Como hemos mencionado, el esquema de reaseguro utilizado en el ejercicio anterior es el llamado Reaseguro Stop Loss, existen otros tipos de reaseguro; sin embargo, dado que el Stop Loss es el tema que se pretende desarrollar en este trabajo, se ha preferido, a manera de introducción, utilizar este esquema y no algún otro.

b) Aumentar su capacidad de suscripción a través del reaseguro

Falta explicar como el reaseguro cumple con esta función; sin embargo, resulta sencillo de explicar ya que la Compañía Aseguradora sumará a su capacidad de retención, la capacidad que proveen los reaseguradores, posibilitando de esta manera captar negocios que de forma individual no podría.

Para las compañías aseguradoras de pequeño y mediano tamaño resulta muy útil el reaseguro ya que como lo hemos mencionado, a través de éste aumentan su capacidad de suscripción compitiendo así con las grandes compañías.

Otras Ventajas del Reaseguro

Gracias al aspecto internacional del reaseguro, la reaseguradora puede brindar experiencia en cuanto a causales de siniestralidad, asesoría técnica, ofrecer productos que se han desarrollado en otros países y brindar asesoría en la selección de riesgos. Esto permitirá que se desarrollen cada vez más productos que satisfagan de manera eficiente las necesidades del asegurado.

1.5 Reaseguro Proporcional y No Proporcional

A manera de describir brevemente los tipos de reaseguro que existen, a continuación daremos una breve descripción de estos desde el punto de vista técnico y después veremos como se distinguen desde el punto de vista operativo. Existen diversos tipos de reaseguro destinados a cubrir riesgos a los que se enfrenta una compañía aseguradora.

Desde el punto de vista técnico, podemos dividir al reaseguro en dos grandes grupos: el reaseguro proporcional y el no proporcional. Al reaseguro proporcional se le denomina “reaseguro de riesgos” mientras que al no proporcional se le denomina “reaseguro de siniestros”.

1.5.1 Reaseguro Proporcional

Se le denomina reaseguro de riesgos, ya que la compañía aseguradora cede un porcentaje de la prima recaudada en cada póliza y en este mismo porcentaje la compañía reaseguradora hace frente a los siniestros de cada póliza. En esta modalidad existen dos tipos de reaseguro: el llamado Cuota-parte y el de Excedentes.

Cuota-parte

En este contrato el reasegurador acepta una porción fija, predeterminada, para todos los riesgos, y se hace responsable con el mismo porcentaje prefijado en todos los siniestros; es decir, supongamos que la aseguradora cedió el 60% de sus primas al reasegurador, por lo tanto, el reasegurador se tiene que hacer responsable del 60% de los siniestros.

Este contrato tiene ventajas tanto para el asegurador como para el reasegurador. Por parte del asegurador, éste tiene la libertad de suscribir libremente siempre y cuando no rebase el límite del contrato, por su parte el reasegurador se ve beneficiado ya que la compañía de seguros no aplica ningún criterio de cesión, por lo tanto recibe igual proporción de riesgos buenos como de riesgos malos y de esta manera estabiliza su cartera.

Desde el punto de vista del asegurador este contrato tiene el inconveniente de que se obliga a ceder aquellos riesgos que podría retener por cuenta propia.

Excedentes

Este contrato tiene demasiada semejanza con el contrato de cuota-parte, la diferencia estriba en que la aseguradora no cede todos los riesgos, sino solo aquellos que sobrepasen una determinada suma llamada pleno de retención o línea. De esta forma el porcentaje cedido a reaseguro varía riesgo por riesgo.

El problema del asegurador que se presentaba en el contrato cuota-parte desaparece ya que aquellos riesgos que la compañía pueda retener en su totalidad, no tendrán que ser cedidos a reaseguro; sin embargo, la administración es más complicada que en el cuota-parte.

1.5.2 Reaseguro No Proporcional

Se le llama reaseguro de siniestros porque la cobertura de este contrato opera siempre y cuando el monto de los siniestros supere una cantidad llamada prioridad. De esta manera, la cobertura de un reaseguro no proporcional esta determinada a posteriori; es decir, tenemos que esperar a ver de que magnitud es el siniestro para ver si la cobertura opera o no, en algunos casos es necesario observar también a cuantos riesgos afectó el siniestro.

En esta categoría se encuentran: Exceso de Pérdida por Riesgo, Exceso de Pérdida por Catástrofe y Limitación de Siniestralidad (Stop Loss).

Exceso de Pérdida por Riesgo

También es llamado WXL - Working Cover. Este tipo de contrato cubre el monto del siniestro "individual" que sobrepasa la prioridad, hasta una cantidad llamada capacidad. Hay que destacar que este contrato opera riesgo por riesgo, por lo tanto, si en un acontecimiento se afectan varias pólizas, se analizara por separado cada póliza para saber si en alguna de ellas entra la cobertura de este contrato.

Exceso de Pérdida por Catástrofe

Denominado Cat XL o Catastrófico. Para que esta cobertura se afecte se tienen que cumplir dos condiciones en un mismo acontecimiento:

- Un número mínimo de riesgos afectados.
- Que el monto acumulado de los siniestros supere la prioridad.

Limitación de Siniestralidad

Llamado también Stop Loss. En este contrato se protege a la cedente contra una desviación en siniestralidad al cabo de un año; es decir, en caso de que el monto acumulado de los siniestros en un año sobrepase cierta prioridad la reaseguradora es responsable por el monto excedente de la prioridad hasta un cierto límite.

Existen otro tipo de reaseguros, como el reaseguro de cúmulos desconocidos o el reaseguro financiero; sin embargo, dado que no es el objetivo hablar de todas las formas de reaseguro, solo se mencionaron aquellas formas más comunes.

1.6 Reaseguro Facultativo y Reaseguro Automático

De acuerdo a su forma operativa; es decir, de acuerdo a la relación jurídica que existe entre la aseguradora y la reaseguradora en los contratos de reaseguro, podemos dividir a estos en dos ramos: facultativos y automáticos.

1.6.1 Reaseguro Facultativo

Son aquellos contratos que se llevan a cabo riesgo por riesgo. El motivo de la existencia de este tipo de contrato, es el hecho de que existen riesgos individuales con una suma asegurada demasiada alta o con una alta exposición al riesgo a cubrir o simplemente porque la aseguradora no desea aceptar el riesgo en su totalidad.

Desde el punto de vista del asegurador, este tipo de contratos resulta comercialmente complicado, ya que tiene que esperar a que la reaseguradora acepte compartir el riesgo para poder celebrar el contrato de seguro, o bien, aceptar el riesgo y estar expuesto al riesgo por sumas aseguradas heterogéneas.
Por parte del reasegurador, se cuenta con la ventaja de tener toda la información que le permitirá conocer ampliamente el riesgo y de esta manera poder otorgar una cotización adecuada.

Resulta evidente que este tipo de contratos tenga un importe mayor en lo que a gastos se refiere.

1.6.2 Reaseguro Automático

Son aquellos contratos en los que se establecen las características de los riesgos a cubrir, de tal manera que la compañía aseguradora se verá obligada a ceder a reaseguro aquellos riesgos que cumplan con las características mencionadas, por su parte el reasegurador se obliga a asumir parte del riesgo.

En lo que respecta al asegurador, este tipo de contratos tienen la ventaja de que le permiten operar libremente sin verse en la necesidad de consultar al reasegurador su aceptación o no de compartir los riesgos individuales que cumplan las características del contrato. Resulta evidente que esto trae como consecuencia importantes ventajas comerciales; es decir, los tramites son más rápidos y los costos de administración son menores.

Por su parte el reasegurador se ve favorecido por el hecho de que este tipo de contratos implican un volumen determinado de primas por períodos largos de tiempo.

La desventaja para el reasegurador radica en el hecho de que no se tiene un control estricto en la selección de riesgos aceptados.

1.7 Retrocesión

Las mismas razones que llevaron a una empresa aseguradora a verse en la necesidad de reasegurarse vuelven a aparecer para la reaseguradora. De esta manera una reaseguradora buscará homogeneizar sus sumas aseguradas a través de una retrocesión; es decir, reasegurar lo ya reasegurado.

Desde luego, el que el reasegurador retroceda un riesgo no implica que su responsabilidad para con la compañía de seguros haya disminuido; de hecho la aseguradora no tiene porque enterarse de que la reaseguradora ha cedido parte del riesgo que aceptó.

En la practica, la reaseguradora sólo busca la retrocesión cuando acepta riesgos superiores a su capacidad. Esto se puede presentar cuando se sigue una política de lograr un gran volumen de primas.

Capítulo Dos

Reaseguro de Stop Loss y Valor esperado de los Siniestros

En este capítulo se dará una descripción del Reaseguro de Stop Loss y de las distribuciones que se suelen utilizar para modelar el número de siniestros y el monto de los siniestros individuales. También se mostrarán formas en las que puede ser calculado el valor esperado del monto acumulado de los siniestros a cargo de la aseguradora y reaseguradora.

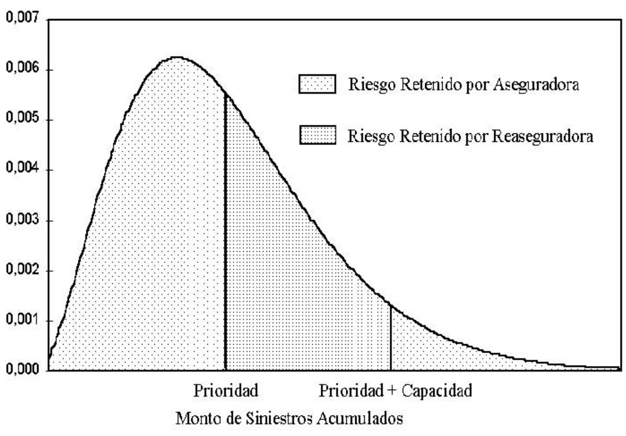
2.1 Descripción del Reaseguro de Stop Loss

El objetivo de este tipo de reaseguro, es proteger a la compañía aseguradora para que los desvíos en siniestralidad no sobrepasen de un determinado monto llamado prioridad; en otras palabras, al contratar este tipo de reaseguro, la compañía de seguros elimina parte del riesgo original reteniendo únicamente el monto de los siniestros acumulados hasta un monto llamado Prioridad. Usualmente la prioridad se expresa en un tanto por ciento de las primas totales (netas o de tarifa) de la cartera protegida.

Lo descrito anteriormente, se presenta en el caso de un contrato de Stop Loss con capacidad ilimitada; sin embargo, existen también contratos de Stop Loss en los que la reaseguradora se hace cargo del monto de los siniestros que exceden a la prioridad hasta un determinado monto llamado capacidad del contrato de reaseguro. En este caso, la compañía aseguradora tendrá la opción de volver a reasegurar el riesgo restante, o bien, dada la poca probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase el riesgo cedido a reaseguro, la compañía puede optar por retener ese riesgo. Al igual que la prioridad, la capacidad del contrato y la prima de Stop Loss se suelen expresar en un tanto por ciento de las primas totales (netas o de tarifa) de la cartera protegida. Para facilitar el entendimiento, a lo largo de este trabajo asumiremos que la prioridad, capacidad y prima de Stop Loss son cantidades fijas que no están en función de la prima cobrada a la cartera protegida.

La siguiente gráfica muestra el riesgo retenido por la aseguradora y el riesgo cedido a reaseguro.

Función de Probabilidad de Siniestros Acumulados



Bajo capacidad ilimitada, la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros asumidos por el asegurador y el reasegurador está determinada de la siguiente manera:

Cuadro 2.1

Monto Total de los Siniestros (S)	Monto Asumido por la Aseguradora (Si)	Monto Asumido por la Reaseguradora (Sr)
0 < S ≤ Prior.	S	0
Prior. < S < ∞	Prior.	S– Prior.

Bajo capacidad limitada, la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros asumidos por el asegurador y por el reasegurador, está determinada de la siguiente manera:

Cuadro 2.2

Monto Total de los Siniestros (S)	Monto Asumido por la Aseguradora (Si)	Monto Asumido por la Reaseguradora (Sr)
0 < S ≤ Prior.	S	0
Prior. < S ≤ Prior. + Cap.	Prior.	S – Prior.
Prior. + Cap. < S < ∞	S – Cap.	Cap.

En la práctica es difícil obtener contratos de reaseguro con capacidad ilimitada, ya que la varianza a cargo del reasegurador sería muy grande y por lo tanto, como veremos más adelante, el recargo por seguridad a cobrar será muy grande. Por otra parte, la compañía reaseguradora corre el riesgo de que, dado que la aseguradora ha limitado su siniestralidad, los criterios de suscripción sean más flexibles.

Parte de este capítulo y del capítulo Tres, esta basado en el libro "The Mathematical Theory of Insurance" de Karl Borch. En este libro Karl Borch habla del reaseguro de Stop Loss tomando en cuenta capacidad ilimitada, por lo que algunos resultados que se presentan en este trabajo para el caso de Stop Loss con capacidad limitada son tan solo extensión de lo ya dicho por Karl Borch.

Como podemos darnos cuenta, es evidente la siguiente igualdad:

$$S = S_i + S_r \qquad 2.1.1$$

por lo que:

$$E(S) = E(S_i) + E(S_r) \qquad 2.1.2$$

Es común que en algunos libros se refieran al reaseguro de Stop Loss, como elReaseguro Óptimo ya que minimiza la varianza; sin embargo en la práctica, desde el punto de vista del reasegurador esta cobertura no es muy deseable ya que aunque es cierto que el contrato de reaseguro es un contrato de buena fe, bajo esta cobertura la Compañía Cedente se podría aprovechar de las condiciones de este contrato y limitar su siniestralidad, la cual podría llegar a tener una gran varianza.

Para ejemplificar un poco lo anterior, imaginemos que una compañía aseguradora desea sacar a la venta un nuevo producto que no existe en el mercado y sobre el cual no se cuentan con estadísticas confiables. Probablemente desde el punto de vista de la Aseguradora la cobertura óptima de reaseguro sea la de Stop Loss ya que podría limitar su siniestralidad a un determinado valor y de esta manera garantizar un balance positivo al final de su operación. Desde el punto de vista de la Reaseguradora, probablemente la cobertura de reaseguro más deseable sería la de Cuota-Parte ya que de esta manera se hace partícipe a la aseguradora de todos los siniestros y por lo tanto existen incentivos para que la Aseguradora mantenga una buena suscripción, por otro lado, la aseguradora y el reasegurador deberían correr la misma suerte en caso de que las estadísticas utilizadas para calcular las primas no reflejen la siniestralidad real y la prima llegue a ser insuficiente.

2.2 Distribuciones de Probabilidad Utilizadas

Los métodos que utilizaremos para calcular el valor esperado y la varianza de los siniestros acumulados, están basados en la Teoría de Riesgo Colectivo. Para medir la siniestralidad de un cartera o un grupo, tenemos que tomar en cuenta dos variables aleatorias: una que mide el número de siniestros y otra que mide el monto de cada siniestro.

2.2.1 Distribución del Número de Siniestros

Generalmente no se cuentan con suficientes datos que nos permitan obtener una distribución que tenga un buen ajuste a los datos observados; sin embargo, es normal suponer que la distribución del número de siniestros se comporte como una distribución Poisson o Binomial Negativa[4].

En algunas ocasiones es posible conocer tan sólo el valor esperado y de esta manera estaríamos restringiendo la libertad de escoger aquella distribución que se ajuste mejor a la realidad; sin embargo en ocasiones, es posible que se tengan estadísticas de riesgos similares y de esta manera poder estimar la varianza del riesgo a cubrir. Esta situación se presentaría con mayor frecuencia en el Reaseguro, ya que en estos casos se podría tener información de cotizaciones que se hicieron para otras compañías aseguradoras.

Para ejemplificar lo anterior, supongamos que una Aseguradora ha solicitado reaseguro por cierto riesgo que ha asumido, también supongamos que para evaluar el número de siniestros esperados, solo se cuenta con la siniestralidad del año pasado y se conoce el número de asegurados del año pasado y del año sobre el cual se desea contratar el reaseguro. De esta manera, parece ser que sólo se podría estimar la esperanza del número de siniestros pero no su varianza. Por su parte, la reaseguradora ha otorgado reaseguro a otras compañías cedentes por riesgos similares y cuenta con la esperanza y la varianza del número de siniestros. De esta manera podríamos asumir que el coeficiente de variación sobre el número de siniestros es igual en los dos riesgos y por lo tanto podríamos estimar la varianza y con esto tener más libertad en la elección de la distribución a ajustar.

A continuación describiremos brevemente las características generales de las distribuciones mencionadas:

[4] Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathemathics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 317.

Distribución Poisson

En esta distribución discreta, la probabilidad de que ocurran exactamente n siniestros se obtiene de la siguiente manera:

$$f(n,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$$

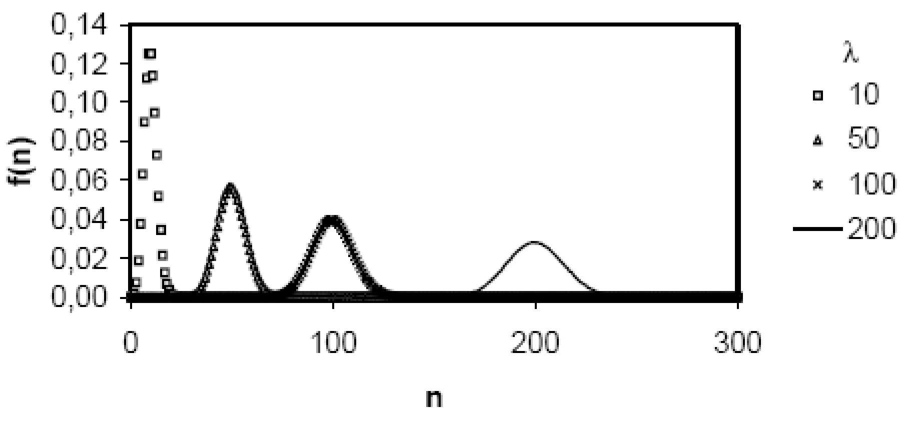
con $E(n) = Var(n) = \lambda$

Restricción $\lambda > 0$

De esta manera, hace falta conocer únicamente la esperanza o la varianza muestral para estimar el parámetro λ

Para darnos una idea sobre el comportamiento de la distribución Poisson, a continuación se muestran varias gráficas de Distribuciones Poisson para distintos valores de λ

Distribución Poisson



Distribución Binomial Negativa

Es muy común también utilizar esta distribución para describir el número de siniestros de una cartera, como veremos más adelante podemos obtener la Distribución Binomial Negativa haciendo ciertos supuestos acerca de la Distribución Poisson. Bajo la Distribución Binomial Negativa, la probabilidad de que ocurran exactamente n siniestros, esta dada de la siguiente manera:

$$f(n,r,p)=\binom{r+n-1}{n}p^r(1-p)^n$$

con $E(n)=\dfrac{rq}{p}$ y $Var(n)=\dfrac{rq}{p^2}$

Restricciones

$0<p\le 1$

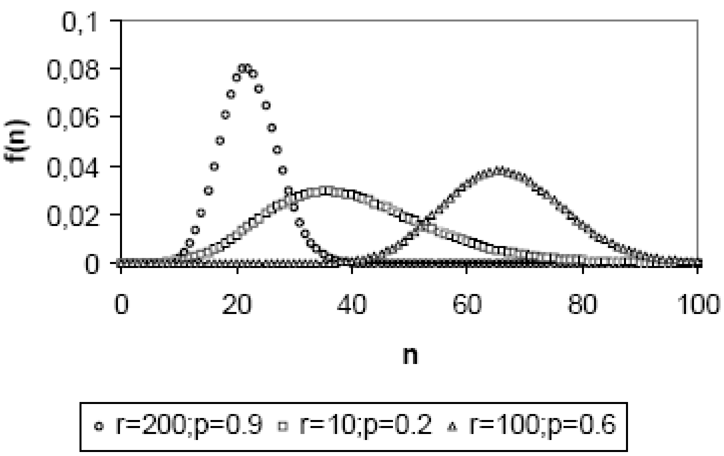
$r>0$

$q=1-p$

Si asumimos que el número de siniestros se distribuye como una Binomial Negativa, es necesario conocer la esperanza y la varianza del número de siniestros.

Con el objetivo de mostrar las formas que puede seguir una distribución Binomial Negativa, a continuación mostramos una gráfica donde aparecen varias distribuciones para distintos valores de los parámetros.

Distribuciones Binomial Negativas



Binomial Negativa como consecuencia de una Distribución Poisson

El número esperado de siniestros de una cartera, esta sujeto a factores externos que influyen directamente en el número esperado de siniestros haciendo que este valor esperado pueda variar significativamente. Ejemplos de estos factores podrían ser las epidemias, el estado social en el que se viva (guerra, revolución, etc.), el nivel socioeconómico de la región geográfica, etc.

De esta manera, asumiendo que hemos elegido una distribución Poisson para describir el número de siniestros, es lógico pensar que el parámetro λ de la distribución Poisson es una variable aleatoria con una cierta distribución.

Para facilitar los cálculos, es común suponer que el parámetro λ de la distribución Poisson se distribuye como una Gamma[5] con parámetros (a,b) de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x,\mathrm{a},\mathrm{b}) = \frac{\mathrm{b}^{\mathrm{a}}}{\Gamma(\mathrm{a})} x^{\mathrm{a}-1} e^{-x\mathrm{b}}$$

con $E(x) = \mathrm{a/b}$ y $Var(x) = \mathrm{a/b}^2$

De esta manera, la distribución resultante es una Binomial Negativa con parámetros r = a y p = b/(b+1).

Demostración Definimos a Mx(t) como la función generadora de momentos de una Poisson evaluada en t.

$$M_x(t) = E(e^{tx}).$$

$$M_N(t) = E[e^{tN}] = E[E[e^{tN} | \Lambda]] = E[e^{\Lambda(e^t - 1)}] = M_\Lambda(e^t - 1)$$
$$= \left[\frac{b}{b - (e^t - 1)}\right]^a = \left[\frac{b/(b+1)}{1 - [1 - b/(b+1)]e^t}\right]^a$$

Ya que la función generadora de momentos para la Binomial Negativa es:

$$M_x(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r$$

podemos concluir que la distribución resultante es una Binomial Negativa con los parámetros mencionados.

Desde luego, si deseamos que el número esperado de siniestros sea n y el parámetro λ de la distribución Poisson se distribuye como una Gamma (a,b), entonces se debe cumplir que a/b = n.

Algunos autores[6] asumen que el número de siniestros se distribuye como una Poisson y proponen a t λ como parámetro de la Poisson con el propósito de tomar a t como una variable aleatoria que se distribuye como una Gamma con parámetros (h,h), de esta forma y de manera análoga a lo descrito anteriormente, podemos demostrar que la distribución resultante se distribuye como una Binomial Negativa con parámetros : r = h y p = h/(h+ λ).

Si utilizamos este último método (parámetro de la Poisson igual a t λ), el valor de h que define

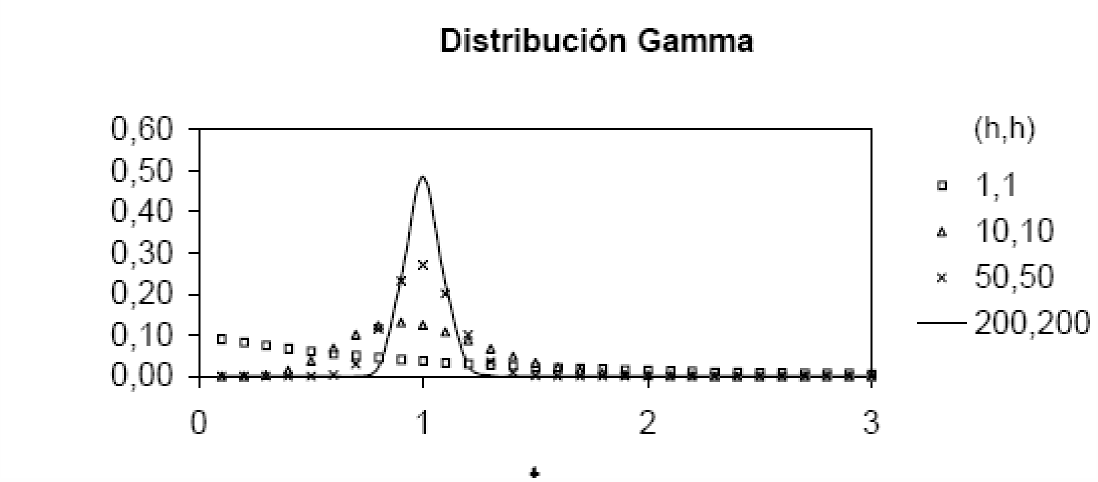
---

[5] Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathemathics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 324.

[6] Heinen, W.; Experiencia Propia vs. Costo Garantizado (1995), XVII Congreso de Actuarios en México, La Kölnische Rück. Daykin, C..D., Pentikäinen T., Pesonen M., (1994) Practical Risk Theory for Actuaries, pag. 48

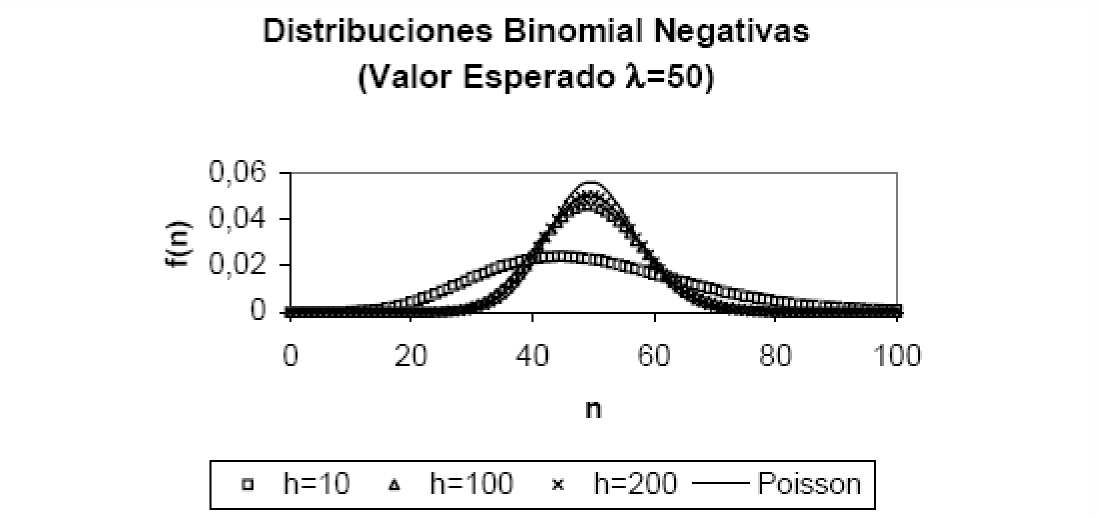
la distribución Gamma (h,h) para la variable aleatoria t, debería ser mayor que 1 para que entonces la distribución Gamma tienda a ser simétrica. La simetría es importante en este caso, ya que resulta lógico que si deseamos dar flexibilidad al número esperado de siniestros, permitamos que el número de siniestros pueda ser mayor que t λ con la misma probabilidad de que pueda ser menor.

En la siguiente gráfica podemos observar que cuando el valor de h tiende cada vez más a ser mayor, la distribución Gamma tiende cada vez más a ser simétrica y más concentrada en el punto 1.



Cabe destacar que si h →∞, la distribución resultante para el número de siniestros se vuelve Poisson.

A continuación se muestra una gráfica que contiene distintas distribuciones de una binomial negativa y podemos observar gráficamente que es lo que sucede cuando el valor del parámetro p se aproxima a 1 (h →∞), en este caso la distribución resultante se aproxima a una Poisson.



2.2.2 Distribución del Monto de cada Siniestro

Aunque es más factible que se tengan estadísticas acerca de esta variable, es común que no se cuente con una distribución propia del monto de cada siniestro y entonces tengamos que ajustar alguna distribución analítica.

Entre las distribuciones más comunes que se utilizan para el monto de cada siniestro en el seguro de vida, podemos mencionar la Gamma, Exponencial, Uniforme, Pareto, entre otras.[7]

Distribución Gamma

Bajo esta distribución, la probabilidad de que un siniestro tenga monto igual a x, esta dada por la siguiente función:

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x\beta}$$

con $E(x)=\alpha/\beta$ y $Var(x)=\alpha/\beta^{2}$

Restricciones:

$x>0$

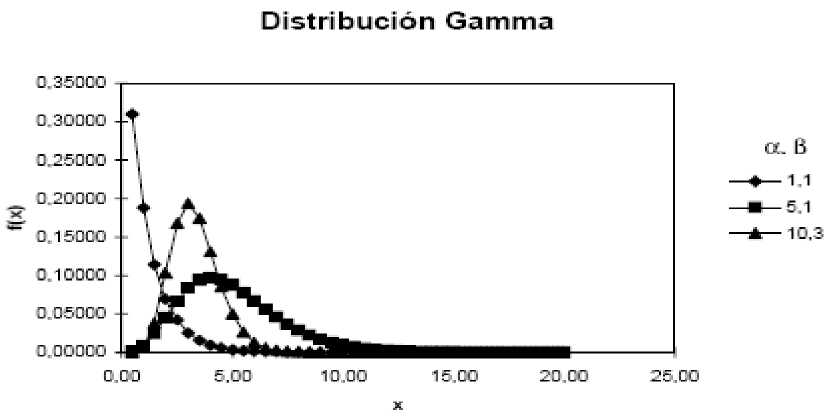
$\alpha>0$

$\beta>0$

Para estimar los parámetro de esta distribución, es necesario conocer al menos la esperanza y la varianza muestral. Más adelante veremos la necesidad de llevar a forma discreta esta distribución.

A continuación se muestra una gráfica donde aparecen distintas distribuciones Gamma para distintos valores de los parámetros.

[7] Para más información consultar el libro "Teoría de Riesgo y sus Aplicaciones a la Empresa Aseguradora"; Latorre Llorens Luis, 1992.



Distribución Exponencial

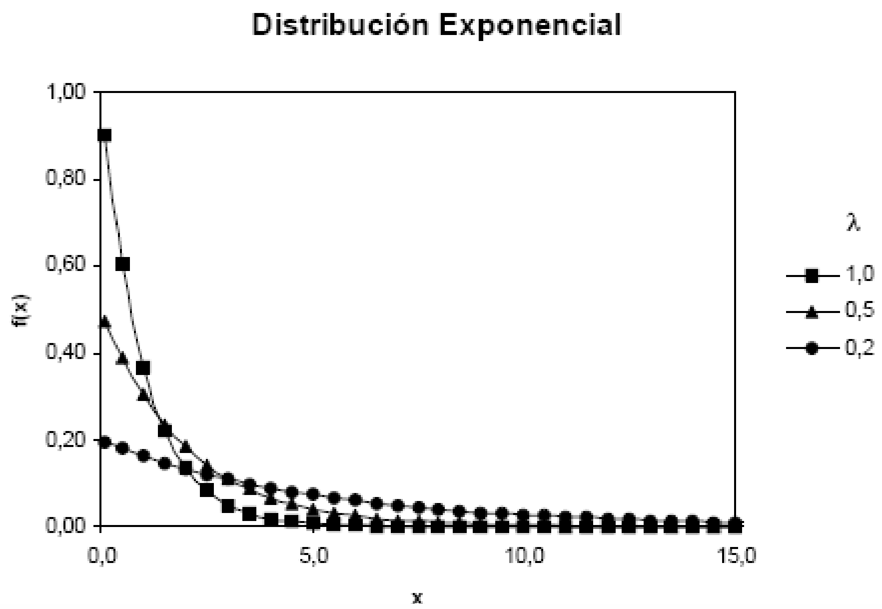
Bajo esta distribución, la probabilidad de que un siniestro tenga un monto igual a x, esta dada por la siguiente función:

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

con $E(x) = 1/\lambda$ y $Var(x) = 1/\lambda^2$
Restricciones:
$x>0$
$\lambda>0$

Es fácil demostrar que una distribución Exponencial con parámetro λ , es igual a una distribución Gamma con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = \lambda$.

Para ilustrar las formas que puede llegar a tener una distribución Exponencial, a continuación se muestra una gráfica con distintas Distribuciones Exponenciales para distintos valores de el parámetro λ



Distribución Pareto

Al suponer que la distribución del monto de cada siniestro sigue una distribución Exponencial o Gamma hemos supuesto que el monto puede tomar valores demasiado cercanos a cero lo cual no sucede muy frecuentemente; sin embargo, esto no implica que dichas distribuciones no se puedan utilizar para modelar la distribución del monto de los siniestros, de hecho como ya he mencionado, son frecuentemente utilizadas ya que producen un ajuste demasiado bueno para el resto de la distribución.

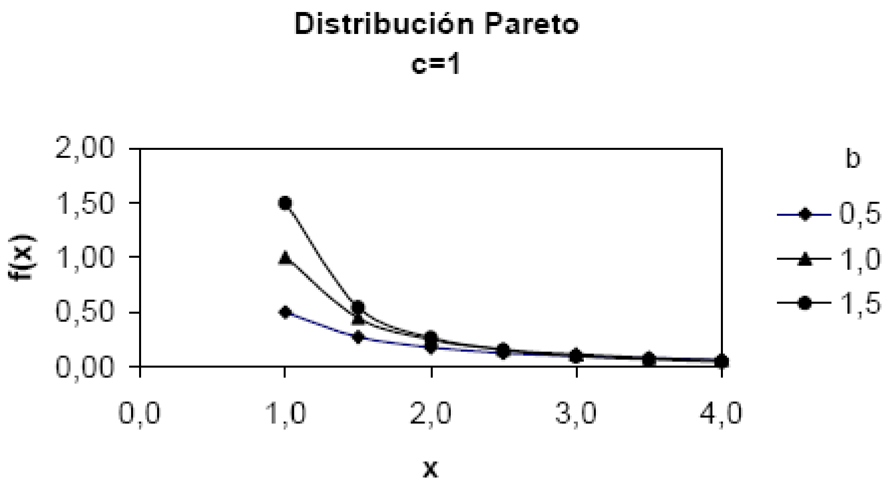
En la distribución de Pareto, los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria deben ser mayores que el parámetro c. La función de densidad esta dada de la siguiente forma:

$$f(x,b,c) = \frac{b\,c^{b}}{x^{b+1}}$$

con $E(x) = \dfrac{b\,c}{b-1}$ y $Var(x) = \dfrac{b\,c^2}{(b-1)^2(b-2)}$

Restricciones:
$0 < b$
$0 < c < x < \infty$

A continuación se ilustran algunas formas que puede llegar a tener la distribución Pareto variando los parámetros.



Distribución Uniforme

Esta distribución es utilizada cuando suponemos que los valores posibles de el monto de un siniestro son igualmente probables. De esta manera, si los valores posibles del monto de un siniestro están comprendidos entre a y b, la probabilidad de que el monto de un siniestro sea x, es igual a:

$$f(x,a,b)=\frac{1}{b-a}$$

con $E(x)=\frac{a+b}{2}$ y $Var(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$

Restricciones:
$-\infty < a < x < b < \infty$

2.3 Valor Esperado del Monto Acumulado de los Siniestros

En esta sección describiremos dos métodos para obtener el valor esperado del monto acumulado de los siniestros desde el punto de vista del asegurador y del reasegurador de acuerdo al riesgo aceptado por cada una de las partes. En el segundo método mostraremos dos variantes que pueden ser utilizadas para discretizar la distribución del monto de los siniestros individuales.

Como se ha mencionado anteriormente, los métodos utilizados están basados en la Teoría de Riesgo Colectivo, la cual tiene como objetivo estudiar a la colectividad total y ya no a los individuos que componen esta colectividad. Dicho de otra manera, lo que nos interesa es el monto del siniestro total (S) que produce la colectividad y ya no los siniestros de cada individuo. El monto S esta dado por la siguiente igualdad:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \qquad 2.3.1$$

Donde X_i representa el monto del i-ésimo siniestro y N el número de siniestros.

Supondremos que los modelos planteados satisfacen las siguientes propiedades:

1 $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
2 $N, X_1, X_2, \ldots$ son mutuamente independientes.

Cuando el número de siniestros (N) se distribuye como una Poisson, se dice que el monto total de los siniestros se distribuye como una Poisson Compuesta, análogamente, cuando el número de siniestros se distribuye como una Binomial Negativa, se dice que el monto total de los siniestros se distribuye como una Binomial Negativa Compuesta.

La Función Generadora de Momentos de la Distribución del Monto Acumulado de Siniestros se puede obtener fácilmente de la siguiente manera[8]:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left(e^{tS}\right) = E\left[E\left(e^{tS} \mid N\right)\right] \\ &= E\left(M_X(t)^N\right) = E\left(e^{N \log M_X(t)}\right) \\ &= M_N\left(\log M_X(t)\right) \end{aligned}$$

2.3.1 Primer Método: Valor Esperado del Monto Acumulado de los Siniestros sin obtener la distribución.

En el primer método, obtendremos el valor esperado de los siniestros pero sin obtener la función de distribución compuesta del monto acumulado de los siniestros. Lo anterior lo haremos a partir de esperanzas condicionales y mostraremos un ejemplo utilizando la distribución Gamma para obtener el valor esperado de los siniestros desde el punto de vista del asegurador y del reasegurador utilizando una herramienta tan sencilla como una Hoja de Cálculo.

Antes de obtener el valor esperado de los siniestros a cargo del asegurador y del reasegurador, obtendremos el valor esperado del riesgo original; es decir, suponiendo que la aseguradora ha aceptado el 100% del riesgo y no cuenta con reaseguro.

De esta manera, el valor esperado del monto total de los siniestros (S), lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$E(S) = E_N\left(E(S \mid N)\right) \qquad 2.3.2$$

---

[8] Bowers, N; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 319.

inclusive la varianza del monto total de los siniestros, la podemos obtener fácilmente de la siguiente manera:

$$Var(S) = E_N(Var(S \mid N)) + Var_N(E(S \mid N)) \quad 2.3.3$$

Cuadro 2.3[9]

	Media	Varianza
General	$p_1 E[N]$	$E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 Var[N]$
Poisson Compuesta (λ)	λp_1	λp_2
Binomial Negativa Compuesta (r,p)	$\frac{rqp_1}{p}$	$\frac{rqp_2}{p} + \frac{rq^2 p_1^2}{p^2}$

Donde p_k es el k-ésimo momento de la distribución de los siniestros individuales.

Ahora bien, para determinar el valor esperado de los siniestros a cargo del reasegurador (S_r), es preciso recordar los valores que la variable S_r puede tomar:

$$Sr = \begin{cases} 0 & Si \quad 0 < S < Prioridad \\ S - Prioridad & Si \quad Prioridad < S < Prioridad + Capacidad \\ Capacidad & Si \quad Prioridad + Capacidad < S \end{cases}$$

De esta manera el valor esperado a cargo del reasegurador nos queda de la siguiente manera:

$$E(S_r) = E_N(E(S_r \mid N)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{P}^{P+C} (s-P) f_S(s \mid N) ds + \int_{P+C}^{\infty} C f_S(s \mid N) ds \right) \Pr(N = n)$$

Donde: P es la Prioridad

C es la Capacidad de la Reaseguradora

$f_S(s \mid N)$ es la función de densidad de la variable aleatoria S dado N.

Ejemplo 2.3.1

Si suponemos que el número de siniestros sigue una distribución Binomial Negativa (r,p) y el monto de cada siniestro se distribuye como una Gamma con parámetros (α, β), las integrales contenidas en la expresión anterior pueden ser expresadas de la siguiente

[9] Bowers, N; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 326.

manera:

$$E(S_r \mid N) = \int_P^{P+C} (s-P) f_S(s \mid N) ds + \int_{P+C}^{\infty} C f_S(s \mid N) ds =$$

$$\int_P^{P+C} s f_S(s \mid N) ds - P[F(P+C, n\alpha, \beta) - F(P, n\alpha, \beta)] + C[1 - F(P+C, n\alpha, \beta)]$$

Donde:

F(P+C,nα,β) representa la función de distribución Gamma $(n\alpha,\beta)$evaluada en P+C.

Por lo tanto:

$$E(S_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_P^{P+C} s f_S(s \mid N) ds - P[F(P+C, n\alpha, \beta) - F(P, n\alpha, \beta)] + C[1 - F(P+C, n\alpha, \beta)] \right) \Pr(N=n)$$

El problema se reduce entonces a encontrar una expresión que nos permita calcular la integral contenida en la suma, y esto se resuelve de la siguiente manera[10]:

$$\int_P^{P+C} s f_S(s \mid N) ds = \int_P^{P+C} \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha} e^{-\beta s} ds$$

Ya que $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, la integral nos queda:

$$\int_P^{P+C} s f_S(s \mid N) ds = \frac{n\alpha}{\beta} [F(P+C, n\alpha+1, \beta) - F(C, n\alpha+1, \beta)]$$

y por lo tanto:

$$E(S_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \frac{n\alpha}{\beta} [F(P+C, n\alpha+1, \beta) - F(C, n\alpha+1, \beta)] - P[F(P+C, n\alpha, \beta) - F(P, n\alpha, \beta)]$$
$$+ C[1 - F(P+C, n\alpha, \beta)]\} \Pr(N=n)$$

lo cual es mas fácil de calcular.

---

[10] Ver Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; et al. (1986) Actuarial Mathemathics, Society of Actuaries, Schauwmburg, pag. 383.

2.3.2 Segundo Método: Valor Esperado del Monto Acumulado de Siniestros utilizando el Algoritmo de Panjer.

En esta sección utilizaremos el Algoritmo de Panjer (1981) para calcular numéricamente distribuciones compuestas. Esta sección ha sido basada en gran parte en el libro "Practical Risk Theory for Actuaries" de: Daykin, Pentikäinen y Pesonen.

Debido a que el Algoritmo de Panjer utiliza 2 supuestos, a continuación se mencionan cuales son estos para posteriormente utilizarlos en el Algoritmo.

Supuestos

1 La función de probabilidad del número de siniestros obedece a la siguiente fórmula:

$$p_k = (a + b / k) p_{k-1}$$

donde a y b son constantes que determinan la distribución del número de siniestros y p_k representa la probabilidad de que ocurran k siniestros.

Las distribuciones Poisson, Binomial Negativa y Binomial cumplen con esta forma de recursión y se pueden utilizar por lo tanto. A continuación mostramos los valores de a y b que cumplen con la fórmula de recursión para las distribuciones Poisson y Binomial Negativa según se describieron en la Sección 2.2.

	Distribuciones	
Constante	Poisson	Binomial Negativa
a	0	1-p
b	λ	(r-1)x(1-p)

2. La distribución utilizada para el monto de cada siniestro es no negativa, discreta y equidistante; es decir solo permite valores de la forma:

Z_i = iM

Donde Z_i representa el monto de siniestro individual igual a iM, i = {0,1,2,...,r} y M es una constante que indica la amplitud del intervalo a utilizar para determinar los valores posibles de cada siniestro.

Desde luego, mientras más pequeño sea el valor de M, la probabilidad de que el valor esperado de cada siniestro sea el correcto, es mayor. Por otro lado, mientras más pequeño sea el valor de M, más cálculos se requerirán para poder evaluar la función de distribución compuesta.
Se define a g_i como:

$$g_i = \text{Prob}\{Z = iM\}$$

donde Z es la variable aleatoria discreta que representa el monto de cada siniestro.
Algoritmo de Panjer

La fórmula de recurrencia de Panjer para calcular numéricamente distribuciones compuestas queda expresada de la siguiente forma:

$$f_j = \frac{1}{1 - a \cdot g_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{i \cdot b}{j} \right) \cdot g_i \cdot f_{j-i}$$

con valor inicial:

$$f_0 = \begin{cases} p_0 & \text{si } g_0 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot g_0^i & \text{si } g_0 > 0 \end{cases}$$

Más explícitamente:

$$f_0 = \begin{cases} e^{n \cdot g_0 - n} & \text{Poisson Compuesta} \\ \left(1 + \frac{a \cdot n \cdot (1 - g_0)}{a + b}\right)^{-\frac{a+b}{a}} & \text{Binomial Negativa Compuesta} \end{cases}$$

Donde:
f_j =Prob{S = j x M} representa la función de densidad del monto total de siniestros.
a y b son las constantes que determinan la distribución del número de siniestros.
r es el valor que determina el monto máximo de los siniestros individuales.

Desde luego, bajo este método, la variable S que determina el monto total de los siniestros es discreta y por lo tanto tendremos que seleccionar aquellos valores que más se acercan a las condiciones del contrato de reaseguro para determinar la prima de Stop Loss; esto es, la Prioridad y Capacidad del Contrato. Es claro que esta fórmula puede ser utilizada en cualquier aplicación de Riesgo Colectivo, simplemente nos referimos al Reaseguro de Stop Loss ya que este es el tema del presente trabajo.

De esta manera podemos calcular la distribución del monto total de los siniestros de una colectividad en forma muy sencilla. Con el propósito de facilitar un poco el entendimiento de esta fórmula, en el Anexo I se encuentra la demostración de esta y un programa en Visual Basic que puede ser anexado a una hoja de cálculo para obtener la distribución compuesta del monto total de siniestros.

Teniendo la distribución compuesta del monto acumulado de siniestros en forma discreta, podemos obtener fácilmente el valor esperado de los siniestros a cargo de la Aseguradora y la Reaseguradora de la siguiente manera:
Capacidad Ilimitada

Recordando el cuadro 2.1, podemos obtener la esperanza del monto de los siniestros a cargo el reasegurador $E(S_r)$, en caso de capacidad ilimitada de la siguiente manera:

$$E(S_r)=\mu_r=\int_P^\infty sf_S(s)ds-P\int_P^\infty f_S(s)ds=\mu-\int_0^P sf_S(s)ds-P[1-F(P)]=\mu+\int_0^P F_S(s)ds-P$$

en forma discreta $E(S_r)$ queda de la siguiente manera:

$$E(S_r)=\sum_{t=P(M)}^{t=\infty}(t\cdot M-P)\cdot f_t$$

Donde:
μ: E(S)
P: Prioridad
M: Es la constante que indica la amplitud del intervalo a utilizar para determinar los valores posibles de los siniestros.
P(M): Es el número entero que mejor aproxima la igualdad P(M)xM=P
f_t : Prob{S =t xM} y representa la función de densidad del monto total de siniestros en forma discreta que se obtiene utilizando el algoritmo de Panjer.

La esperanza del monto de los siniestros acumulados totales E(S), se puede obtener como se indica en 2.3.2.

Posteriormente es posible obtener el valor esperado de los siniestros a cargo del asegurador despejando de 2.1.2 $E(S_i)$.

$$E(S_i) = E(S) - E(S_r)$$

Capacidad Limitada

Para el caso de un contrato de Stop Loss con capacidad limitada, se puede obtener el valor esperado de los siniestros a cargo del Reasegurador $E(S_r)$, de la siguiente manera:

$$E(S_r) = \mu_r = \int_P^{P+C} s f_S(s)ds - P\int_P^{P+C} f_S(s)ds + C\int_{P+C}^{\infty} f_S(s)ds$$
$$= (P+C)F_S(P+C) - PF_S(P) - \int_P^{P+C} F_S(s)ds - P[F_S(P+C) - F_S(P)] + C[1 - F(P+C)]$$
$$= C - \int_P^{P+C} F_S(s)ds$$

en forma discreta se puede expresar $E(S_r)$ de la siguiente manera:

$$E(S_r) = \sum_{t=P(M)}^{t=P(M)+C(M)} (t\cdot M - P)\cdot f_t + \sum_{t=P(M)+C(M)}^{\infty} C\cdot f_t$$

Donde:
C: Capacidad del contrato de Stop Loss
C(M): Es el número entero que mejor aproxima la igualdad C(M)xM=C

Las otras variables representan lo señalado en el caso de capacidad ilimitada.

De igual manera se puede obtener $E(S_i)$ despejando de 2.1.2 y E(S) como se indicó en 2.3.2.

Probablemente la pregunta que surja ahora, sea respecto a la distribución discreta del monto de cada siniestro, hemos supuesto que la distribución del monto de cada siniestro es no negativa, discreta y equidistante, pero ¿es así como se presenta en la realidad?, ¿por qué hemos hablado de distribuciones continuas al inicio de este capítulo?. La respuesta es muy simple, recordemos que lo que buscamos es una manera de aproximar la distribución compuesta del monto total de los siniestros y desde luego podremos discretizar alguna función continua y por lo tanto utilizar el algoritmo de Panjer, tengamos en mente entonces, que al discretizar la distribución del monto de cada siniestro, no significa que el monto de los siniestros individuales no puedan tomar el valor de algún punto intermedio entre los posibles valores según la distribución discreta, lo que hacemos es tratar de facilitar el cálculo para una buena aproximación de la distribución total de siniestros.

Métodos para Discretizar Distribuciones Continuas

Como ya hemos dicho, requerimos discretizar las funciones continuas que posiblemente se asumieron con el fin de utilizar el algoritmo de Panjer, a continuación describiremos brevemente dos métodos que pueden ser utilizados para discretizar funciones de probabilidad continuas y con esto, poder aplicar el Algoritmo de Panjer.

a) Método del Punto Medio para Discretizar Funciones Continuas

Si a la distribución del monto de cada siniestro se le ha ajustado una distribución en forma continua o si está basada en los siniestros observados, lo primero que hay que hacer es discretizarla en la forma:

$$g_i = \text{Prob}\{Z = iM\}$$

Un método muy sencillo, es concentrar la masa de probabilidad de los intervalos (0,2M], (2M, 4M], (4M,6M], etc., en los puntos medios respectivos: M, 3M, 5M, etc; es decir:

$g_1 = G(2M)$
$g_3 = G(4M) - G(2M)$
$g_5 = G(6M) - G(4M)$
.
.
$g_r = 1 - G((r-1)\cdot M)$

r tiene que ser lo suficientemente grande para que la masa de probabilidad concentrada a la derecha del punto rM sea insignificante.

b) Método para Discretizar Funciones Continuas sin alterar la Esperanza de la Distribución

Probablemente la primera idea que nos viene al escuchar la característica fundamental de este método es concentrar la masa de probabilidad g_i del intervalo: ((i-1)xM,(i+1)xM] en el punto medio: ixM, de la siguiente manera:

g_i es tal, que la siguiente igualdad se cumple:

$$i \cdot M \cdot g_i = \int_{(i-1)M}^{(i+1)M} x f_X(x)\,dx$$

Donde:

$g_i =$	*Prob{Z=iM}*
x	Representa la variable aleatoria continua.
$f_x(x)$	Función de densidad de la variable aleatoria continua.

Sin embargo al utilizar este método, la función de distribución discreta no cumple una de las propiedades fundamentales de toda función de distribución, la función de distribución evaluada en infinito no necesariamente es igual a 1.

Una solución a este problema, es utilizar el método mostrado en el libro "Practical Risk Theory for Actuaries" de: Daykin, Pentikäinen y Pesonen.

Definimos a g_i de la siguiente manera:

$$g_i = r_i + l_i$$

Donde:

$$l_i = d_i - r_{i-1},\ r_{i-1} = d_i \cdot i - e_i,$$

$$d_i = Prob\{(i-1)\cdot M < X \leq i\,M\} = F(i\,M) - F((i-1)\cdot M),$$

$$e_i = \frac{1}{M}\int_{(i-1)\cdot M}^{i\,M} x f_X(x)dx$$

En el Anexo II, se demuestra que la esperanza de la distribución original y la esperanza de la distribución discretizada son iguales.

2.3.3 Otros Métodos para aproximar la distribución del monto de los siniestros acumulados.

El motivo de utilizar otras aproximaciones para la distribución del monto de los siniestros es debido a que en ocasiones, en particular cuando el número esperado de siniestros es muy grande, aplicar alguno de los dos métodos descritos anteriormente para obtener el valor esperado del monto de los siniestros a cargo del asegurador y del reasegurador, trae como consecuencia problemas computacionales que pueden ser resueltos si utilizamos alguna función de probabilidad conocida para representar el monto acumulado de los siniestros. A continuación de presentan dos aproximaciones contenidas en el Capítulo 11 del libro Actuarial Mathematics de Bowers N.; et. al. La demostración a estas aproximaciones están contenidas en el mismo capítulo.

Desde luego, existen otras aproximaciones a la distribución del monto de los siniestros acumulados, en el libro "Practical Risk Theory for Actuaries" de: Daykin, Pentikäinen y Pesonen se puede encontrar más información al respecto.

Teorema 2.3.1 (Aproximación Normal)

a) Si el monto acumulado de siniestros S sigue una distribución compuesta determinada por una distribución Poisson (λ) que describe el numero de siniestros y una distribución f(x) que describe el monto de los siniestros individuales, entonces:

$$Z = \frac{S - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}$$

converge a una Distribución Normal (0,1) a medida que $\lambda \to \infty$.

b) Si el monto acumulado de siniestros S sigue una distribución compuesta determinada por una distribución Binomial Negativa (r,p) que describe el número de siniestros y una distribución f(x) que describe el monto de los siniestros individuales, entonces:

$$Z = \frac{S - r\left(q/p\right)p_1}{\sqrt{r\left(q/p\right)p_2 + r\left(q^2/p^2\right)p_1^2}}$$

q/p

converge a una Distribución Normal (0,1) a medida que $r \rightarrow \infty$.

Donde p_1 y p_2 representan el 1er. y 2do. momento respectivo de la función de distribución del monto de siniestros individuales f(x).

De esta manera, podríamos fácilmente obtener el valor esperado de los siniestros a cargo del asegurador y del reasegurador. Sin embargo, existe un problema, ya que por lo regular la distribución que representa el monto de los siniestros acumulados esta sesgada y como la distribución normal es simétrica, esto causaría errores en la estimación de los valores esperados, sobre todo en un contrato de reaseguro de Stop Loss en el que por lo regular tiene mucha importancia la "cola derecha" de la distribución. Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente aproximación:

Aproximación Gamma Trasladada

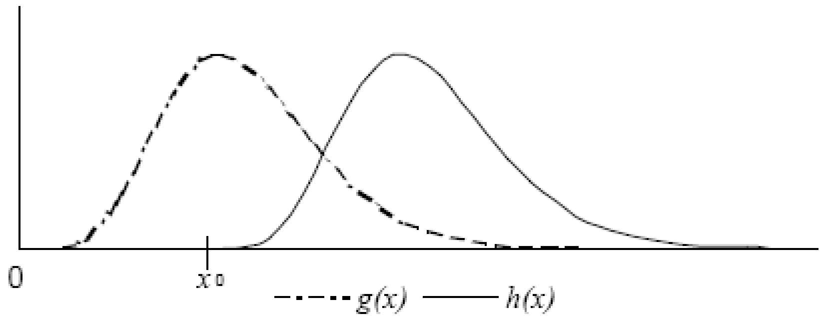
Sea G (x : α, β) la función de distribución Gamma con parámetros (α, β), es decir:

$$G(x:\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}\, dt$$

Sea

$$H(x:\alpha,\beta,x_0) = G(x - x_0 : \alpha,\beta) \qquad \text{(Gamma Trasladada)}$$

Distribución Gamma Trasladada



La aproximación de este método consiste en suponer que el monto acumulado de siniestros sigue una distribución H (x :α, β, x_0) con la restricción de que $x > x_0$, de esta manera podemos estimar α, β y x_0 por el método de momentos. Los momentos centrales de S serían entonces:

$$E(S) = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$E\left[(S - E(S))^3\right] = \frac{2\alpha}{\beta^3}$$

Si suponemos que el número de siniestros sigue una distribución Poisson (λ), entonces por el método de momentos α, β y x_0 se obtienen de la siguiente manera:

$$\alpha = 4\lambda \frac{p_2^3}{p_3^2}$$

$$\beta = 2\frac{p_2}{p_3}$$

$$x_0 = \lambda p_1 - 2\lambda \frac{p_2^2}{p_3}$$

Si suponemos que el número de siniestros sigue una distribución Binomial Negativa (r,p), entonces α, β y x_0 se obtienen de la siguiente manera:

$$\alpha = \left(\frac{2(pp_2 + qp_1^2)}{p^2 p_3 + 3qpp_1 p_2 + 2q^2 p_1^3}\right)^2 \cdot \left(rqpp_2 + rq^2 p_1^2\right)$$

$$\beta = \frac{2p(pp_2 + qp_1^2)}{p^2 p_3 + 3qpp_1 p_2 + 2q^2 p_1^3}$$

$$x_0 = \frac{rqp_1}{p} - \left(\frac{2(pp_2 + qp_1^2)}{p^2 p_3 + 3qpp_1 p_2 + 2q^2 p_1^3}\right) \cdot \left(rqp_2 + \frac{rq^2 p_1^2}{p}\right)$$

Donde:

p_1, p_2 y p_3 Son los tres primeros momentos respectivos, de la distribución del monto de cada siniestro.

Capítulo Tres

Varianza del Monto Acumulado de los Siniestros y Recargo por Seguridad

En este capítulo hablaremos del riesgo, en términos de varianza, a cargo de la Aseguradora y la Reaseguradora para aquellos contratos de Stop Loss con Capacidad ilimitada y limitada. Veremos también como la varianza puede ser utilizada para determinar el recargo por seguridad a cobrar. A manera de introducción empezaremos a analizar una forma en la que puede ser determinado el recargo por seguridad para así conocer la importancia de saber el valor de la varianza a cargo del reasegurador.

3.1 Recargo por Seguridad

En el capítulo pasado hablamos del monto esperado de los siniestros a cargo del Asegurador y del Reasegurador; sin embargo, hablando del Reaseguro de Stop Loss es importante recordar que la Reaseguradora no debería cobrar únicamente el valor esperado de los siniestros a su cargo, en cambio, debería cobrar adicionalmente un recargo por seguridad que está en función de la varianza del monto de los siniestros por el riesgo asumido; es decir:

$$PSL = E(S_r) + \theta \cdot \{Var(S_r)\}^{\frac{1}{2}}$$

Donde:

PSL: Prima de Stop Loss sin tomar en cuenta los gastos del Reasegurador.

S_r : Variable Aleatoria que representa el monto de los siniestros acumulados a cargo del reasegurador.

θ Factor a aplicar a la Desviación Estándar del monto de los siniestros a cargo del reasegurador para determinar el recargo por seguridad. Para facilitar el entendimiento, en esta trabajo le llamaremos "Factor de Seguridad" y estará dado en porcentaje.

El valor de θ es decisión de la Compañía Reaseguradora y puede ser determinado por las políticas de ésta y/o por la competencia en precios del mercado.

Es común que en la práctica encontremos recargos de seguridad en función de la Esperanza sin hacer ningún análisis de la varianza del monto de los siniestros. En el Reaseguro de Stop Loss esto significaría que podríamos cobrar la misma prima de reaseguro por dos riesgos aceptados que tuvieran el mismo valor esperado de siniestros pero distinta varianza, lo cual resulta ilógico.

En ocasiones y dependiendo de la competencia en precios que exista en el mercado, es posible que el recargo por seguridad sea igual a cero[11].

[11] Ver inciso l) de la sección 1.1 Elementos del Seguro.

Una forma conveniente para determinar el valor de θ, es fijando la probabilidad de ruina; es decir, escoger aquella θ tal que la probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima de reaseguro sea un determinado valor, por ejemplo 5%, 10%, 20%, etc.. Análogamente se podría utilizar la probabilidad de ruina para contemplar la posibilidad de aceptar o rechazar el riesgo en el caso en que las fuerzas de mercado exijan un máximo como prima de reaseguro.

De esta manera, de los dos métodos planteados en la Sección 2.3, el método en el que se utiliza el Algoritmo de Panjer para obtener Distribuciones Compuestas tiene ventajas significativas, ya que, teniendo la distribución del monto acumulado de los siniestros podemos obtener fácilmente la varianza a cargo del Asegurador y del Reasegurador. De igual forma, se puede obtener fácilmente la probabilidad de ruina del reasegurador de la siguiente forma:

$$Probabilidad(S_r > PSL) = Probabilidad(S > PSL + Prioridad) = 1 - F_S(PSL + Prioridad)$$

Recordemos que S representa la variable aleatoria que determina el monto acumulado de los siniestros.

Resulta obvio que la PSL sea menor a la capacidad del contrato de Stop Loss, de otra manera no habría ningún incentivo por parte de la Aseguradora para obtener Reaseguro.

3.2 Varianza del Monto Acumulado de los Siniestros

Hemos hablado de la importancia de conocer la Varianza del Monto de los Siniestros a cargo del Asegurador y el Reasegurador; sin embargo, aún no hemos dicho como poder obtenerla.

En el Capítulo Dos, mencionamos que la Varianza del Monto de los Siniestros de toda la cartera, la podríamos obtener de la siguiente forma:

$$Var(S) = E_N(Var(S|N)) + Var_N(E(S|N))$$

También, en el Capítulo Dos, mencionamos la siguiente igualdad:

$$S = S_i + S_r$$

Por lo anterior y recordando la dependencia que existe entre las variables S_i y S, podemos calcular la Var(S) de la siguiente manera:

$$Var(S) = Var(S_i) + Var(S_r) + 2Cov(S_i, S_r)$$

La varianza del monto de los siniestros a cargo del asegurador Var(S_i) la podemos obtener de la siguiente manera:

$$Var(S_i)=\int_{s_i=0}^{\infty}s_i^2 f_{S_i}(s_i)ds_i-(\mu_i)^2$$

Donde:

$f_{S_i}(s_i)$: Representa la función de densidad del monto de los siniestros a cargo de la aseguradora

μ_i: Representa el valor esperado de los siniestros a cargo de la aseguradora

De igual manera podemos obtener la varianza del monto de los siniestros a cargo del reasegurador Var(S_r):

$$Var(S_r)=\int_{s_r=0}^{\infty}s_r^2 f_{S_r}(s_r)ds_r-(\mu_r)^2$$

Donde:

$f_{S_r}(s_r)$: Representa la función de densidad del monto de los siniestros a cargo del reasegurador.

μ_r: Representa el valor esperado de los siniestros a cargo del reasegurador.

Por último, la Cov(S_i, S_r) se puede obtener de la siguiente manera:

$$Cov(S_i,S_r)=E(S_i\cdot S_r)-\mu_i\cdot\mu_r$$

3.2.1 Varianza del Monto Acumulado de los Siniestros para el Contrato de Stop Loss con Capacidad Ilimitada

Para facilitar el entendimiento, olvidemos que al utilizar el Algoritmo de Panjer para calcular distribuciones compuestas, hemos obtenido una función discreta. Lo que haremos entonces, será asumir que conocemos la distribución continua del monto acumulado de siniestros para después utilizar el Algoritmo de Panjer, o alguna de las aproximaciones mencionadas en la sección 2.3.3, y obtener una aproximación a los valores que nos interesan.

Si recordamos los valores que la variable aleatoria S_i puede tomar en términos de S para un Contrato de Stop Loss con Capacidad Ilimitada (cuadro 2.1), entonces se puede obtener la Var(S_i) de la siguiente forma:

$$Var(S_i) = \int_{s=0}^{P} s^2 f_S(s)ds + \int_{s=P}^{\infty} P^2 f_S(s) - (\mu_i)^2$$

La varianza retenida por el reasegurador bajo un Contrato de Stop Loss con Capacidad Ilimitada la podemos obtener, en términos de S, de la siguiente manera:

$$Var(S_r) = \int_{s=P}^{\infty} (s-P)^2 f_S(s)ds - (\mu_r)^2$$

Para calcular la varianza total del monto de los siniestros hace falta conocer el valor de la $Cov(S_i , S_r)$, la cual, como mencionamos anteriormente, es igual a la esperanza del producto de las variables aleatorias S_i y S_r menos el producto de las esperanzas de las variables aleatorias S_i y S_r . De esta manera, lo único que falta por determinar es la esperanza del producto de las variables aleatorias, ya que en el Capítulo Dos hemos descrito métodos para calcular el valor esperado de los siniestros a cargo del asegurador y del reasegurador.

La esperanza del producto de las variables aleatorias para un Contrato de Stop Loss con capacidad ilimitada se puede obtener, en términos de S, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E(S_i \cdot S_r) &= \int_{P}^{\infty} (P)\cdot(s-P) f_S(s)ds = P\left[\mu - P\cdot F_S(P) + \int_0^P F_S(s)ds\right] - P^2[1 - F_S(P)] \\ &= P\left[\mu + \int_0^P F_S(s)ds\right] - P^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la $Cov(S_i , S_r)$ nos queda:

$$\begin{aligned} Cov(S_i, S_r) &= E(S_i, S_r) - \mu_i \cdot \mu_r = P\left[\mu + \int_0^P F_S(s)ds\right] - P^2 - \left(P - \int_0^P F_S(s)ds\right)\cdot\left(\mu + \int_0^P F_S(s)ds - P\right) \\ &= \mu\int_0^P F_S(s)ds + \left(\int_0^P F_S(s)ds\right)^2 - P\int_0^P F_S(s)ds = \int_0^P F_S(s)ds\left(\mu + \int_0^P F_S(s)ds - P\right) \\ &= \int_0^P F_S(s)ds \cdot (\mu - \mu_i) = \int_0^P F_S(s)ds \cdot \mu_r \end{aligned}$$

Es claro entonces que la $Cov(S_i , S_r)$ en el caso de un contrato de Stop Loss con Capacidad Ilimitada es continua y no negativa. Esto demuestra que el Reaseguro de Stop Loss tiene un incentivo económico ya que la varianza original del portafolio puede ser reducida a la varianza retenida por el asegurador $Var(S_i)$ más la varianza cedida al reasegurador $Var(S_r)$ desapareciendo parte de la varianza original en una cantidad igual a 2 $Cov(S_i , S_r)$.

Cabe destacar que el valor de $Cov(S_i , S_r)$ depende solamente, en el caso de capacidad ilimitada, de la distribución compuesta resultante y del valor de la Prioridad del Contrato de Stop Loss. Ahora bien una vez determinada la función de distribución de los siniestros acumulados el valor de $Cov(S_i , S_r)$ dependerá únicamente del valor de la Prioridad. De esta manera podemos escribir $Cov(S_i , S_r)$ como una función H de la Prioridad (P); es decir:

$$Cov(S_i , S_r) = H(P)$$

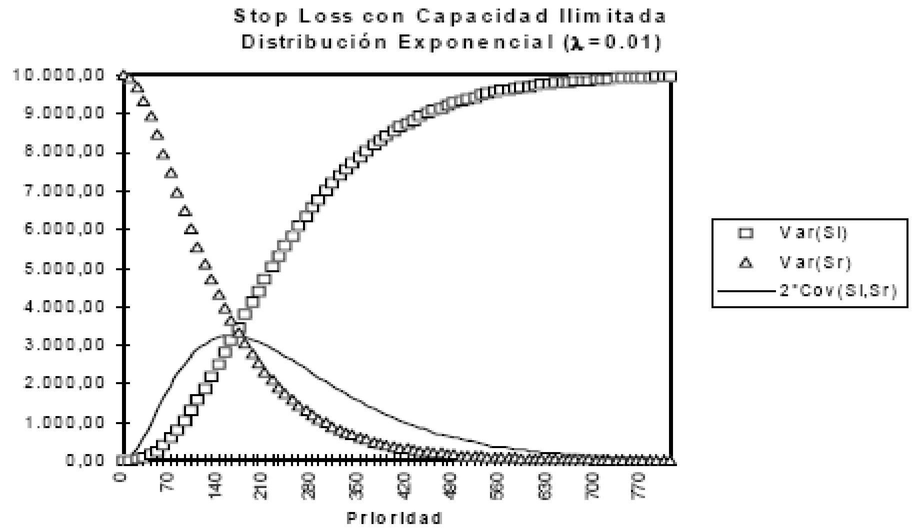
Cuando P vale cero $H(0) = 0$, de la misma manera, cuando P tiende a ∞ $H(\infty)=0$. Estos resultados son lógicos, ya que en el primer caso, $P=0$, el monto de los siniestros a cargo del reasegurador es igual al monto de los siniestros de la colectividad, por lo tanto $Var(S) = Var(S_r)$. De la misma manera, cuando P tiende a ∞, el monto de los siniestros a cargo del asegurador es igual al monto de los siniestros de la colectividad y entonces $Var(S) = Var(S_i)$.

Dado que $H(0) = H(\infty) = 0$, por el Teorema de Rolle (Cálculo Diferencial e Integral), existe al menos un punto c en $(0, \infty)$ tal que $H'(c)=0$. Por lo anterior, si existe un punto en donde la función H(P) es mayor que cero, entonces existe al menos un punto máximo en el interior de $(0, \infty)$.

A continuación se muestra un ejemplo donde se asume una distribución Exponencial para el monto acumulado de siniestros y se muestran resultados que nos permitirán evaluar y darnos cuenta de la forma en la que se distribuye el riesgo de acuerdo a el valor de Prioridad seleccionado.

Ejemplo 3.2.1

Para facilitar los cálculos, supongamos que la función de distribución compuesta es una Exponencial con parámetro $\lambda = 1/100$ ($\mu = 100$). Si obtenemos la $Cov(S_i , S_r) = H(P)$ para distintos valores de P, obtenemos la siguiente gráfica:



Continuando con el mismo ejemplo y considerando los siguientes supuestos, podemos obtener información suficiente para que la compañía de Seguros decida el valor de la Prioridad. Además se puede obtener información que ayudará a comprender el riesgo a cubrir por parte de la aseguradora y la reaseguradora.

Supuestos:
Prima Neta Cobrada a la Colectividad: $130.00
Valor Esperado de los Siniestros: $100.00
Factor de Seguridad θ : 25%

Prioridad	Prima Retenida Aseguradora	Utilidad Esperada Aseguradora	Utilidad % Esperada Aseguradora	Pérdida Máxima Aseguradora	Probabilidad de Ruina Aseguradora	Probabilidad de Ruina Reaseguradora
0	5,00	5,00	3,85%	0,00	0,00%	28,65%
25	27,74	5,62	4,32%	0,00	0,00%	28,01%
50	46,36	7,02	5,40%	3,64	62,90%	26,28%
75	61,53	8,76	6,74%	13,47	54,05%	23,82%
100	73,84	10,63	8,18%	26,16	47,79%	20,98%
125	83,83	12,48	9,60%	41,17	43,24%	18,06%
150	91,95	14,26	10,97%	58,05	39,87%	15,25%
175	98,54	15,92	12,24%	76,46	37,33%	12,69%
200	103,91	17,44	13,42%	96,09	35,38%	10,43%
225	108,29	18,83	14,48%	116,71	33,86%	8,48%
250	111,87	20,08	15,45%	138,13	32,67%	6,85%
275	114,81	21,20	16,31%	160,19	31,72%	5,49%
300	117,23	22,21	17,08%	182,77	30,97%	4,38%
325	119,23	23,11	17,77%	205,77	30,35%	3,48%
350	120,88	23,90	18,39%	229,12	29,85%	2,76%
375	122,26	24,61	18,93%	252,74	29,45%	2,18%
400	123,41	25,24	19,41%	276,59	29,11%	1,71%
425	124,37	25,79	19,84%	300,63	28,83%	1,35%
450	125,17	26,28	20,22%	324,83	28,60%	1,06%

Prioridad	E(Si)	E(Sr)	Var(Si)	$\{Var(Si)\}^{1/2}$	Var(Sr)	$\{Var(Sr)\}^{1/2}$	2*Cov(Si,Sr)	PSL
0	0,00	100,00	0,00	0,00	10.000,00	100,00	0,00	125,00
25	22,12	77,88	40,69	6,38	9.510,71	97,52	448,60	102,26
50	39,35	60,65	255,90	16,00	8.451,82	91,93	1.292,28	83,64
75	52,76	47,24	683,20	26,14	7.216,03	84,95	2.100,77	68,47
100	63,21	36,79	1.289,06	35,90	6.004,24	77,49	2.706,71	56,16
125	71,35	28,65	2.016,53	44,91	4.909,25	70,07	3.074,22	46,17
150	77,69	22,31	2.808,22	52,99	3.964,73	62,97	3.227,04	38,05
175	82,62	17,38	3.615,94	60,13	3.173,51	56,33	3.210,56	31,46
200	86,47	13,53	4.403,43	66,36	2.523,55	50,23	3.073,02	26,09
225	89,46	10,54	5.145,94	71,74	1.996,89	44,69	2.857,16	21,71
250	91,79	8,21	5.828,37	76,34	1.574,32	39,68	2.597,31	18,13
275	93,61	6,39	6.443,10	80,27	1.237,69	35,18	2.319,21	15,19
300	95,02	4,98	6.987,99	83,59	970,95	31,16	2.041,06	12,77
325	96,12	3,88	7.464,64	86,40	760,45	27,58	1.774,91	10,77
350	96,98	3,02	7.877,06	88,75	594,83	24,39	1.528,11	9,12
375	97,65	2,35	8.230,64	90,72	464,82	21,56	1.304,54	7,74
400	98,17	1,83	8.531,39	92,37	362,96	19,05	1.105,65	6,59
425	98,57	1,43	8.785,51	93,73	283,25	16,83	931,24	5,63
450	98,89	1,11	8.998,96	94,86	220,95	14,86	780,10	4,83

El valor esperado de los siniestros no necesariamente tiene que ser igual a la Prima Neta cobrada a la Colectividad, de hecho, la experiencia Mexicana de Grupo lleva incluido un recargo por desviaciones en siniestralidad y cuando se cobra el 100% de esta tabla, es claro que el valor esperado de los siniestros para un grupo normal (sin agravación de riesgo) será menor que la Prima Neta Cobrada si asumimos la mortalidad real del grupo.

La Pérdida Máxima de la Aseguradora, contempla la prima de $130 pesos cobrada a la colectividad.

Desde el punto de vista de la Aseguradora, cuanto más grande es la Prioridad mayor es la varianza del monto de los siniestros a su cargo y menor será la Prima de Stop Loss que pagará al Reasegurador. El valor óptimo para la Compañía de Seguros dependerá de la función de utilidad que se tenga, más aparte ciertas restricciones; es decir, hasta que monto esta dispuesta la Compañía de Seguros a pagar para reducir una unidad de varianza. Un punto a considerar para elegir el valor de la Prioridad es aquel en el que la $Cov(S_i , S_r)$ alcanza el punto máximo (Prioridad = 150), de esta manera el monto de varianza que elimina la aseguradora por peso de prima cobrada por la Reaseguradora, se maximiza.

Es importante mencionar que en caso de que la Aseguradora elija Prioridad igual a 25, tendría asegurada una utilidad de $2.74, sin embargo este valor es muy pequeño y prácticamente la Aseguradora estaría jugando un papel de Agente de Seguros.

La probabilidad de ruina representa la probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima cobrada por asumir un determinado riesgo tanto para la Aseguradora como para la Reaseguradora. En el caso de la Aseguradora, el cambio de 0% a 62.9% de probabilidad de ruina se justifica por el hecho de que la probabilidad de que la Aseguradora llegue a pagar un monto igual a la Prioridad es muy alta; en términos de S, esto significa que la probabilidad de que la Aseguradora llegue a pagar un monto igual a la Prioridad es igual a la probabilidad de que el monto total de los siniestros sea mayor o igual a la misma (Capacidad Ilimitada).

3.2.2 Varianza del Monto Acumulado de los Siniestros para el Contrato de Stop Loss con Capacidad Limitada

En la sección anterior observamos como se comportan la varianza y covarianza del Contrato de Stop Loss con Capacidad Ilimitada para poder evaluar de mejor forma el riesgo que se está cubriendo desde punto de vista del asegurador como del reasegurador. En esta sección y de manera análoga a la anterior, describiremos la forma de obtener la Varianza de los montos a cargo del asegurador y del reasegurador para un contrato de Stop Loss con capacidad Limitada.

Mencionamos en la sección 3.2 que la varianza del monto de los siniestros de la colectividad podría obtenerse de la siguiente forma:

$$Var(S) = Var(S_i) + Var(S_r) + 2Cov(S_i, S_r)$$

En el contrato de Stop Loss con capacidad limitada, la varianza del monto de los siniestros a cargo del asegurador se puede obtener en términos de S (ver cuadro 2.2), de la siguiente manera:

$$Var(S_i) = \int_0^P s^2 f_S(s)ds + \int_P^{P+C} P^2 f_S(s)ds + \int_{P+C}^{\infty} \{s-(C-P)\}^2 f_S(s)ds - (\mu_i)^2$$

De la misma forma, podemos obtener la varianza del monto de los siniestros a cargo del reasegurador en términos de S, de la siguiente forma:

$$Var(S_r) = \int_P^{P+C} (S-P)^2 f_S ds + \int_{P+C}^{\infty} (C-P)^2 f_S ds - (\mu_r)^2$$

De manera análoga a la sección anterior y con el propósito de calcular la Cov(S_i , S_r) , debemos calcular la esperanza del producto de S_i y S_r la cual se puede expresar en términos de S, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E(S_i \cdot S_r) &= \int_P^{P+C} (s-P)Pf_S(s)ds + \int_{P+C}^{\infty} (s-C)Cf_S(s)ds \\
&= P\int_P^{P+C} sf_S(s)ds - P^2\int_P^{P+C} f_S(s)ds + C\int_{P+C}^{\infty} sf_S(s)ds - C^2\int_{P+C}^{\infty} f_S(s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P\left[(P+C)F_S(P+C) - PF_S(P) - \int_P^{P+C} F_S(s)ds\right] - P^2[F_S(P+C) - F_S(P)] \\
&\quad + C\mu - C\int_0^{P+C} sf_S(s)ds - C^2[1 - F_S(P+C)] \\
&= C\mu - C^2 - P\int_P^{P+C} F_S(s)ds + C\int_0^{P+C} F_S(s)ds
\end{aligned}$$

Por último, para obtener la Cov(S_i , S_r) , lo único que tenemos que hacer es restar el producto de las esperanzas de S_i y S_r a la esperanza del producto de S_i y S_r. De esta manera la Cov(S_i , S_r) nos queda:

$$
\begin{aligned}
Cov(S_i,S_r) &= E(S_i\cdot S_r)-E(S_i)E(S_r)\\
&= C\mu - C^2 - P\int_P^{P+C} F_S(s)ds + C\int_0^{P+C} F_S(s)ds - \left(\mu + \int_P^{P+C} F_S(s)ds - C\right)\left(C - \int_P^{P+C} F_S(s)ds\right)\\
&= C\mu - C^2 - P\int_P^{P+C} F_S(s)ds + C\int_0^{P+C} F_S(s)ds - \mu C + \mu\int_P^{P+C} F_S(s)ds - C\int_P^{P+C} F_S(s)ds\\
&\quad + \left(\int_P^{P+C} F_S(s)ds\right)^2 + C^2 - C\int_P^{P+C} F_S(s)ds\\
&= \int_P^{P+C} F_S(s)ds\left[\mu - P - 2C + \int_P^{P+C} F_S(s)ds\right] + C\int_0^{P+C} F_S(s)ds\\
&= \int_P^{P+C} F_S(s)ds[\mu_i - P] + C\int_0^{P} F_S(s)ds
\end{aligned}
$$

Para demostrar que la Cov(S_i , S_r) es no negativa, lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que la Cov(S_i , S_r) es negativa, de esta manera tiene que existir algún caso en el que si alguna variable S_i ó S_r aumenta la otra decrece, si volvemos al cuadro 2.2 podemos observar que esto no puede suceder y entonces llegamos a una contradicción. Por lo que podemos afirmar que la Cov(S_i , S_r) es no negativa.

La existencia de un máximo interior[12] en la Cov(S_i , S_r) como función de la Prioridad (P) o la Capacidad (C) dependerá de las características de la función de probabilidad del monto acumulado de los siniestros. Para demostrar esto, a continuación se presentan dos ejemplos en los cuales, si asumimos una distribución Uniforme (0,100) para el monto total de los siniestros y tomamos una Prioridad igual a 20 para el primer ejemplo y una Prioridad igual a 70 para el segundo, podemos demostrar que la existencia de un máximo interno no puede ser garantizada como en el caso de Capacidad Ilimitada.

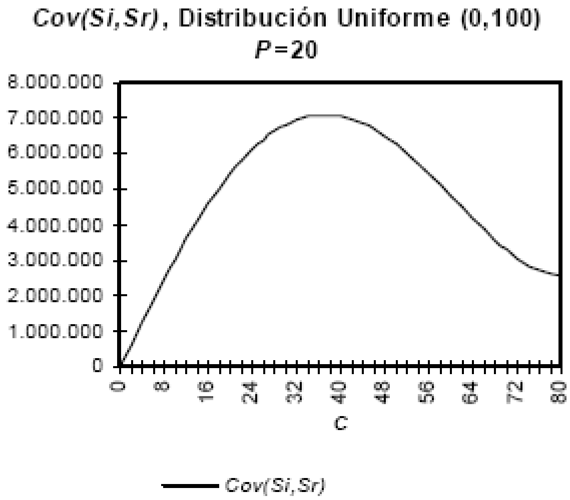
Ejemplo 3.2.2.1

Supongamos que la función de probabilidad del monto acumulado de siniestros es una función Uniforme (0,b). De esta manera tenemos:

$$
Cov(S_i,S_r) = \frac{C^4 + C^3(4P-2b) + C^2(b^2+4P^2-6Pb) + C(2b^2P - 2bP^2)}{4b^2}
$$

Si fijamos a P=20 el valor de la Cov(S_i , S_r) depende exclusivamente de C, esto es, Cov(S_i , S_r) =H(C). Si tomamos a b=100, la gráfica de la Cov(S_i , S_r) queda de la siguiente manera:

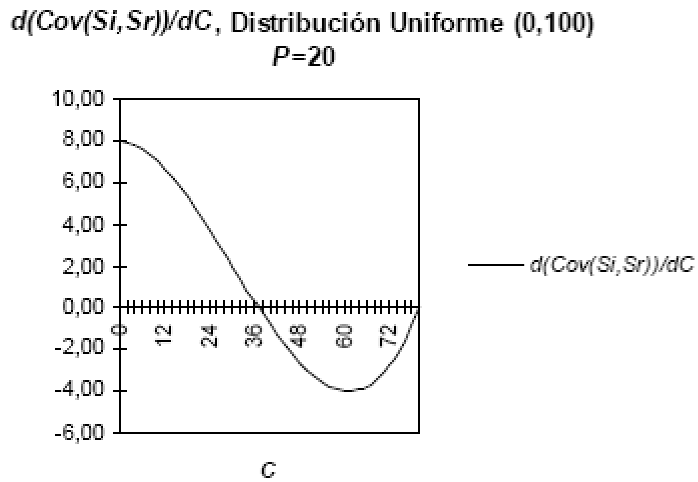
[12] El máximo se alcanza en algún punto intermedio a los valores extremos posibles y la derivada de la función evaluada en ese punto es 0.



Para obtener el punto máximo es necesario obtener la derivada de la Cov(S_i , S_r) respecto a C, para el caso de la distribución uniforme (0,b) esto nos queda:

$$\frac{d\left(Cov(S_i,S_r)\right)}{dC}=\frac{4C^3+3C^2(4P-2b)+2C\left(b^2+4P^2-6Pb\right)+\left(2b^2P-2bP^2\right)}{4b^2}$$

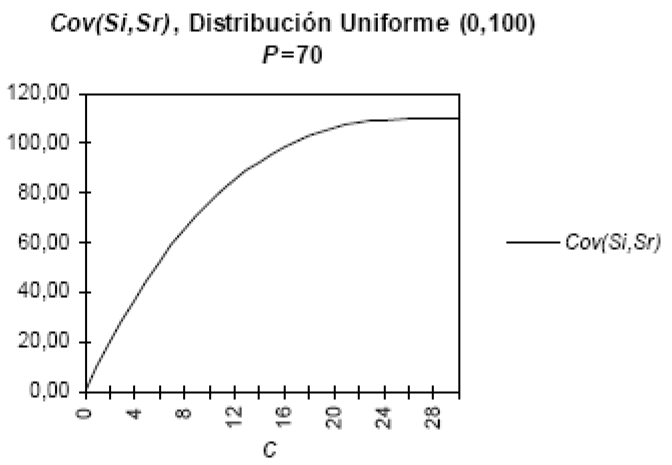
La gráfica de la derivada de la Cov(S_i , S_r) respecto a C, para el caso de la Distribución Uniforme (0,100) y Prioridad igual a 20, nos queda:



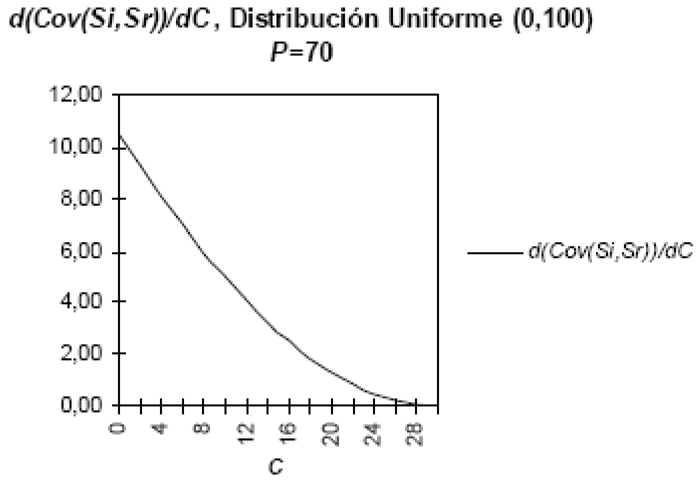
Entonces, para el caso de una Distribución Uniforme (0,100), si fijamos a P=20, la Cov(S_i , S_r) tiene un máximo interno cuando C vale (37.02)

Ejemplo 3.2.2.2

Para el caso de una Distribución Uniforme (0,100) y una Prioridad igual a 70 la gráfica de la Cov(S_i , S_r) como función de la Capacidad nos queda:



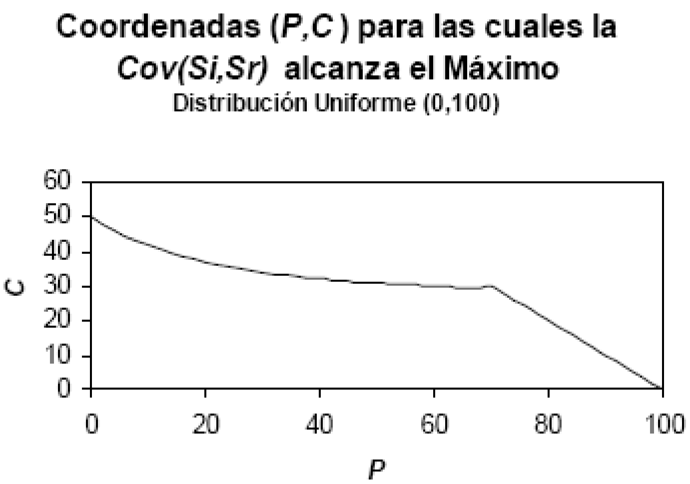
La gráfica de la derivada de la Cov(S_i , S_r) respecto a C, es:



En este caso (Prioridad = 70), el máximo de la Cov(Si , Sr) se obtiene cuando C = 30.

Estos dos ejemplos nos demuestran el hecho de que no podemos garantizar la existencia de algún máximo interior. La existencia dependerá de la distribución de los siniestros acumulados y el valor de la Prioridad si es que deseamos obtener el máximo como función de la Capacidad.

Como resultado particular, en el caso de la distribución (0,100), si para alguna Prioridad, no existe algún máximo interior (como función de la Capacidad), el máximo (con derivada igual a cero) se alcanza en el extremo derecho de la Capacidad, es decir cuando la capacidad es igual a 100 – Prioridad. A continuación se presenta una gráfica donde se muestran los valores (P,C) para los cuales la Cov(S_i , S_r) alcanza su punto máximo.



Se puede observar que a partir de Prioridad igual a 70, el máximo se alcanza cuando la Capacidad toma el valor máximo posible; es decir 100 – P.

Para el caso de la existencia de un máximo interior como función de la Prioridad, el caso es el mismo, dependerá de la distribución del monto de siniestros acumulados y del valor de la Capacidad.

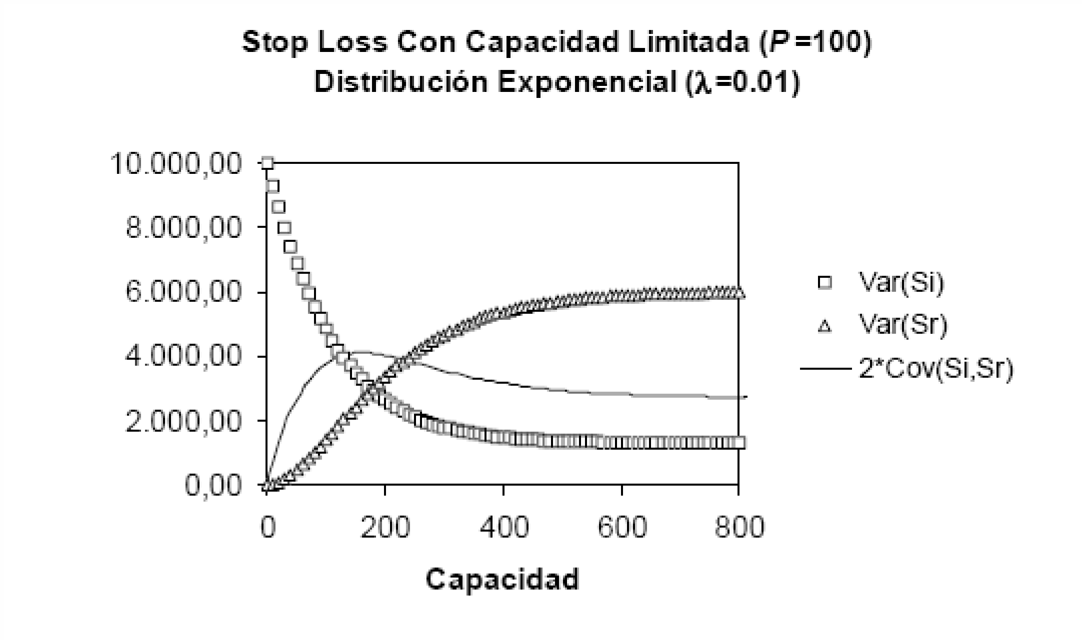
Se ha mostrado la distribución Uniforme (0,b) con el objetivo de facilitar el entendimiento; sin embargo, es muy difícil que la distribución resultante llegue a comportarse de esta manera.

Tampoco profundizaremos más en el tema de la Cov(S_i , S_r) , lo que interesa es que para el caso de Capacidad Limitada, la existencia de un máximo interior de la Cov(S_i , S_r) no es garantizada como en el caso de Capacidad Ilimitada.

Lo que haremos a continuación, será asumir que la distribución del monto de siniestros acumulados sigue una distribución exponencial y presentar a la Aseguradora la Prima de Stop Loss a cobrar para distintas combinaciones de Prioridad y Capacidad, de esta manera la Aseguradora tendrá elementos suficientes para que, de acuerdo a su función de utilidad, escoja aquella combinación de Prioridad y Capacidad que optimice su utilidad.

Ejemplo 3.2.2.3

Para facilitar los cálculos, supongamos que la función de distribución de siniestros acumulados es una Exponencial con parámetro $\lambda = 1/100$ ($\mu = 100$). Si fijamos la Prioridad en 100 y obtenemos la Cov(S_i , S_r) como función de la Capacidad; esdecir Cov(S_i , S_r) =H (C) para distintos valores de C, obtenemos la siguiente gráfica:



Ahora bien, si suponemos que la Prima Neta Cobrada por la compañía Aseguradora a la Colectividad fue de $130.00 y el factor de seguridad utilizado por la Compañía Reaseguradora es de 25%, entonces tenemos los siguientes resultados:

Supuestos:

Prima Neta Cobrada a la Colectividad: $130.00

Valor Esperado de los Siniestros: $100.00

Prioridad: $100.00

Factor de Seguridad θ : 25%

Capacidad	E(Si)	E(Sr)	Var(Si)	$\{Var(Si)\}^{1/2}$	Var(Sr)	$\{Var(Sr)\}^{1/2}$	2*Cov(Si,Sr)	PSL
0	100,00	0,00	10.000,00	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	96,50	3,50	9.287,58	96,37	22,17	4,71	690,25	4,68
20	93,33	6,67	8.621,83	92,85	84,46	9,19	1.293,72	8,97
30	90,47	9,53	8.002,14	89,45	180,85	13,45	1.817,01	12,90
40	87,87	12,13	7.427,26	86,18	305,78	17,49	2.266,96	16,50
50	85,53	14,47	6.895,49	83,04	454,16	21,31	2.650,35	19,80
60	83,40	16,60	6.404,84	80,03	621,40	24,93	2.973,76	22,83
70	81,48	18,52	5.953,11	77,16	803,37	28,34	3.243,52	25,61
80	79,74	20,26	5.538,00	74,42	996,44	31,57	3.465,56	28,15
90	78,17	21,83	5.157,19	71,81	1.197,39	34,60	3.645,43	30,48
100	76,75	23,25	4.808,35	69,34	1.403,41	37,46	3.788,24	32,62
110	75,46	24,54	4.489,22	67,00	1.612,09	40,15	3.898,69	34,58
120	74,29	25,71	4.197,59	64,79	1.821,37	42,68	3.981,04	36,38
130	73,24	26,76	3.931,38	62,70	2.029,47	45,05	4.039,15	38,02
140	72,28	27,72	3.688,59	60,73	2.234,94	47,28	4.076,47	39,53
150	71,42	28,58	3.467,33	58,88	2.436,55	49,36	4.096,12	40,92
160	70,64	29,36	3.265,84	57,15	2.633,32	51,32	4.100,84	42,19
170	69,93	30,07	3.082,47	55,52	2.824,44	53,15	4.093,08	43,35
180	69,29	30,71	2.915,70	54,00	3.009,31	54,86	4.074,99	44,42

Capacidad	Prima Retenida Aseguradora	Utilidad Esperada Aseguradora	Utilidad % Esperada Aseguradora	Probabilidad de Ruina Aseguradora	Probabilidad de Ruina Reaseguradora
0	130,00	30,00	23,08%	27,25%	36,79%
10	125,32	28,82	22,17%	25,84%	35,11%
20	121,03	27,70	21,31%	24,41%	33,63%
30	117,10	26,64	20,49%	22,97%	32,34%
40	113,50	25,63	19,71%	21,55%	31,19%
50	110,20	24,67	18,98%	20,15%	30,18%
60	107,17	23,77	18,28%	18,79%	29,28%
70	104,39	22,91	17,63%	17,48%	28,48%
80	101,85	22,11	17,01%	16,23%	27,76%
90	99,52	21,35	16,42%	36,97%	27,12%
100	97,38	20,63	15,87%	37,76%	26,55%
110	95,42	19,96	15,36%	38,51%	26,03%
120	93,62	19,33	14,87%	39,21%	25,57%
130	91,98	18,74	14,41%	39,86%	25,15%
140	90,47	18,18	13,99%	40,47%	24,77%
150	89,08	17,66	13,58%	41,03%	24,43%
160	87,81	17,17	13,21%	41,56%	24,13%
170	86,65	16,71	12,86%	42,04%	23,85%
180	85,58	16,29	12,53%	42,49%	23,59%

Se puede claramente observar que a mayor capacidad del contrato de reaseguro; es decir, a mayor riesgo retenido por la reaseguradora, mayor será la Prima de Stop Loss y menor será la varianza retenida por la compañía aseguradora. Es importante observar que la Cov(S_i , S_r)

alcanza su punto máximo cuando la Capacidad vale 160. Este punto (Capacidad = 160) no significa que represente el valor óptimo para la compañía aseguradora, el valor óptimo estará dado de acuerdo a la función de utilidad de la compañía aseguradora más aparte ciertas restricciones como podría ser, hasta que precio esta la compañía aseguradora dispuesta a pagar por una unidad de varianza.

El salto de 16.23% a 36.97% en la probabilidad de ruina, se debe al hecho de que para estos casos la prima retenida pasa de 101.85 a 99.52 y, dado que la prioridad fue fijada en 100.00, para que el monto de los siniestros a cargo de la aseguradora sobrepase la prima retenida se requiere que el monto acumulado de los siniestros sobrepase de 101.85 en el primer caso ó de 99.52 en el segundo caso.

Lo que hemos hecho entonces ha sido presentar las primas de Stop Loss tal como si fuera un menú y le diéramos a escoger a la compañía aseguradora la Capacidad que ella quisiera pagando la prima correspondiente. De esta manera hemos determinado los precios desde el punto de vista de la Oferta[13] dejando al lado de la demanda escoja la opción que más le convenga.

Es posible que la compañía aseguradora no conozca en forma analítica cual es su función de utilidad, sin embargo, esto no significa que la compañía aseguradora no se comporte de acuerdo a dicha función; es decir puede comportarse de acuerdo a alguna función de utilidad pero no conocer en forma analítica esta. Por lo tanto, si la compañía reaseguradora presentará a la aseguradora las primas de Stop Loss por cada opción, es posible que la persona a cargo de tomar la decisión sobre cual opción comprar, elija la opción que optimice la utilidad de la compañía aseguradora. Desde luego, los resultados serían más objetivos si se llegase a conocer la función de utilidad real de la compañía aseguradora.

[13] En el documento "Axiomatic characterization of insurance prices" de Shaun S. Wang, Virginia R. Young, Harry Panjer, se propone un método para obtener la prima de mercado tomando en cuenta el lado de la oferta y la demanda.

Capítulo Cuatro

Ejemplo Práctico y Observaciones

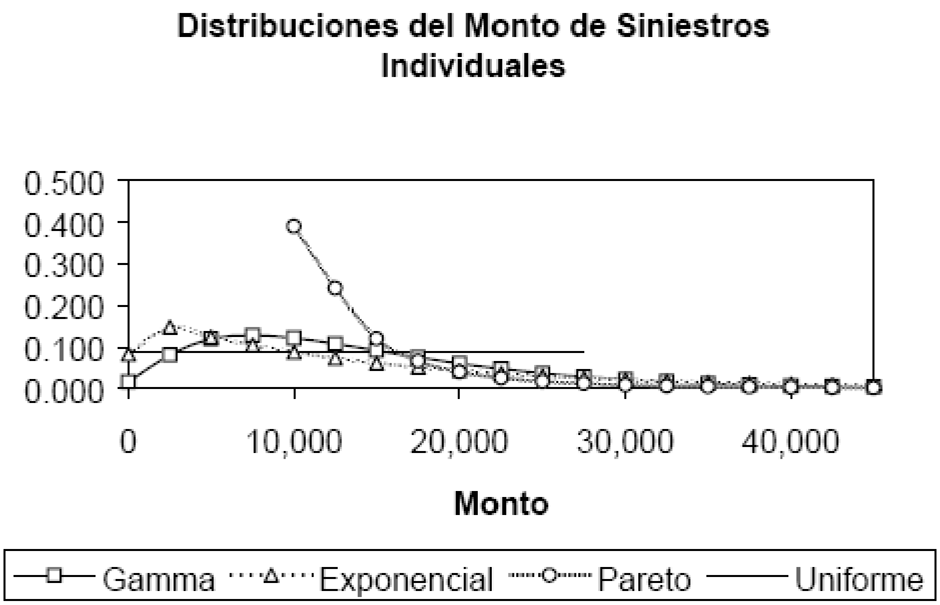
En este capítulo se desarrollará en forma práctica todo lo descrito en los capítulos dos y tres con el objeto de ejemplificar la manera en la que se pueden calcular las primas de Stop Loss y cual es el riesgo que la aseguradora y la reaseguradora corren.
Resulta interesante conocer los resultados a los que se puede llegar si se asumen distribuciones diferentes tanto en el número de siniestros como en el monto de los siniestros individuales, por lo que en este capítulo mostramos la variación de los resultados si asumimos distribuciones diferentes.

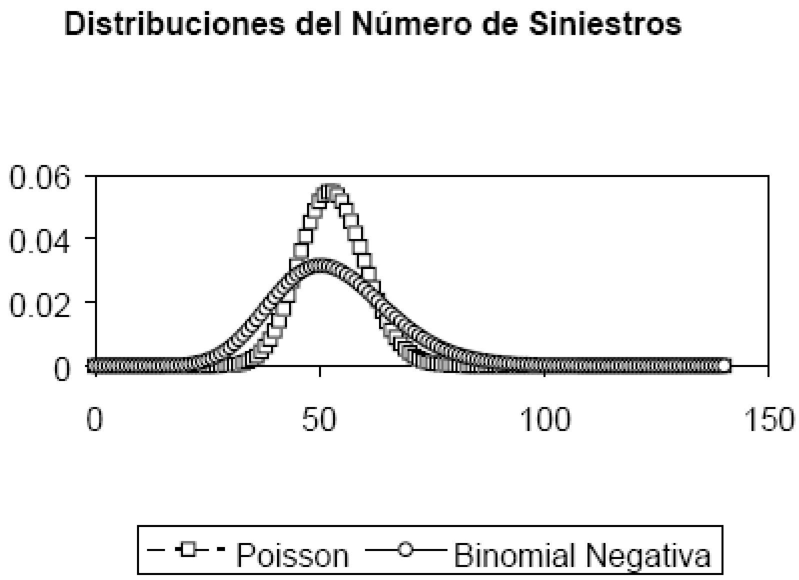
4.1 Ejemplo Práctico

Supongamos que alguna Compañía de Seguros ha solicitado a una Reaseguradora la cotización de un Stop Loss de acuerdo a los siguientes términos:

Objeto del Contrato:	Cubrir el monto acumulado de los siniestros pagados durante la vigencia del contrato que sobrepasen la Prioridad, en lo relacionado con la cobertura de muerte y el beneficio complementario de doble indemnización por muerte accidental hasta la Capacidad del Contrato de Stop Loss.
Vigencia del Contrato:	1° Enero 1998 al 31 Diciembre de 1998
Número de Asegurados (1998):	10,123 (igual que en 1997)
Distribución de Monto de Siniestro:	Como hemos dicho al inicio de este capítulo haremos este ejemplo suponiendo varias distribuciones del monto de siniestros individuales.
Monto promedio de Siniestro:	$14,250.00
Número esperado de Siniestros:	53, de acuerdo a experiencia en siniestralidad. De igual forma, supondremos que el número de siniestros se distribuye Poisson y Binomial Negativa.
Opciones de Stop Loss:	a) Prioridad: $700,000.00 Capacidad: $1’300,000.00 b) Prioridad: $800,000.00 Capacidad: $1’200,000.00 c) Prioridad: $900,000.00 Capacidad: $1’100,000.00

De esta forma, si calculamos los resultados que obtenemos al asumir distintas distribuciones para el número de siniestros como para el monto de los siniestros tenemos[14]:



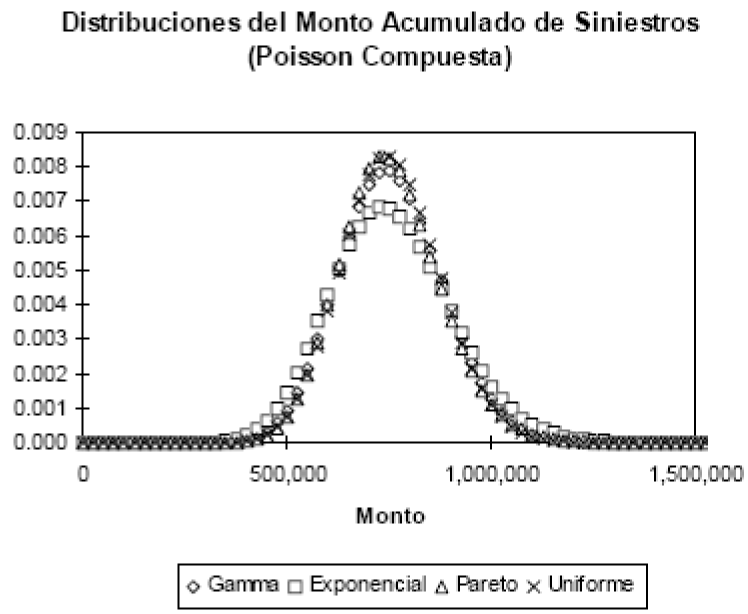


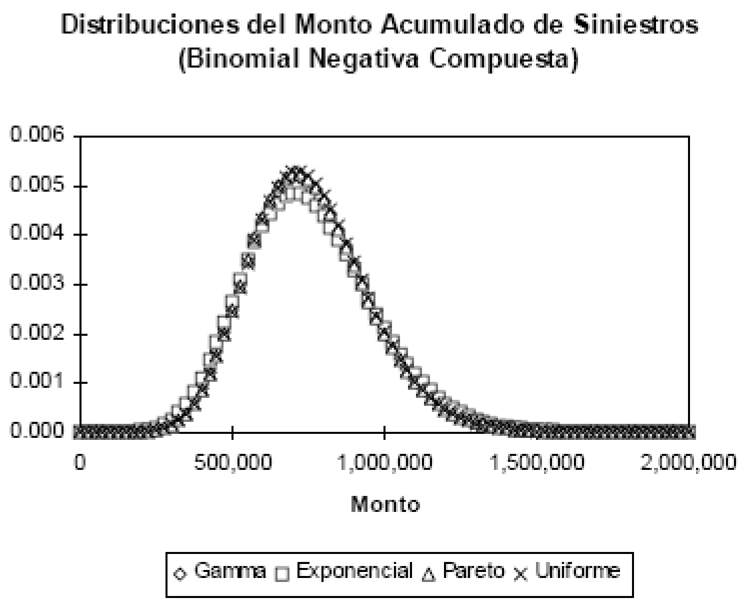
[14] Las gráficas se obtuvieron utilizando el método para discretizar funciones continuas sin alterar la esperanza de la distribución (página 36).

Para obtener algunas distribuciones se tomaron en forma adicional los siguientes supuestos:

- Coeficiente de Variación del Monto de Siniestros Individuales: 70%
- Coeficiente de Variación del Número de Siniestros (Parámetro t)[15] : 20%

Si utilizamos el Algoritmo de Panjer para calcular distribuciones compuestas, obtenemos las siguientes gráficas:



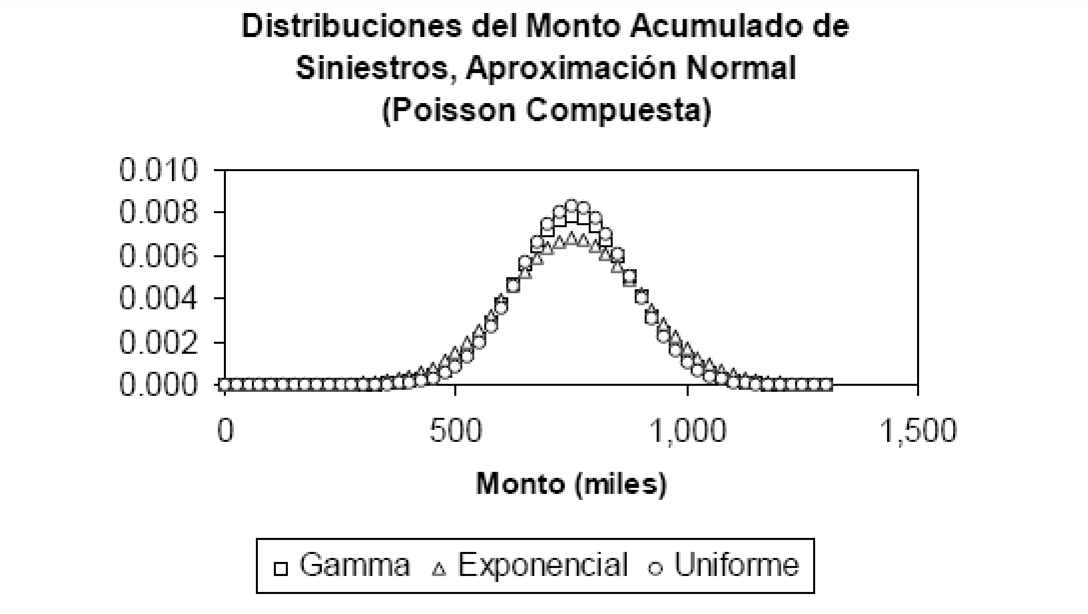


[15] Capítulo Dos, Página 19

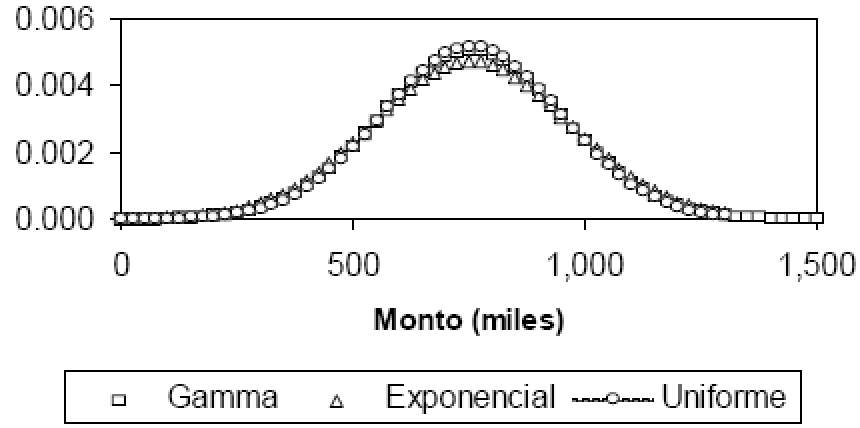
Como se puede observar, resulta claro que las distribuciones del monto acumulado de siniestros utilizando la distribución Binomial Negativa tienen mayor varianza que si asumimos una distribución Poisson (λt) para el número de siniestros. Este resultado es lógico ya que como se dijo en el Capítulo Dos, las distribuciones Binomial Negativa se pueden obtener a partir de la Distribución Poisson (λt) si se asume que el parámetro t sigue una distribución Gamma lo que representa añadir cierta varianza a la distribución del número de siniestros.

Otro aspecto que resulta interesante, es el hecho de que las distribuciones presentan cierta similitud (para este caso) a una distribución normal, que es una de las aproximaciones que se sugirieron en el Capítulo Dos.

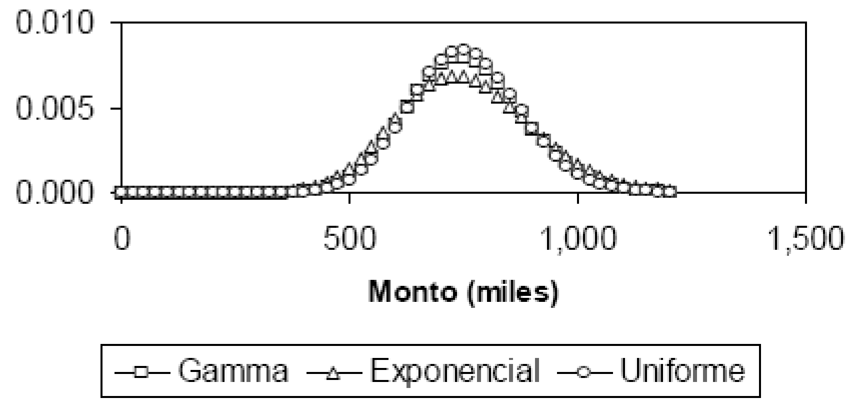
Las gráficas que se obtienen al utilizar las aproximaciones de la Distribución Normal y la Gamma Trasladada son las siguientes:

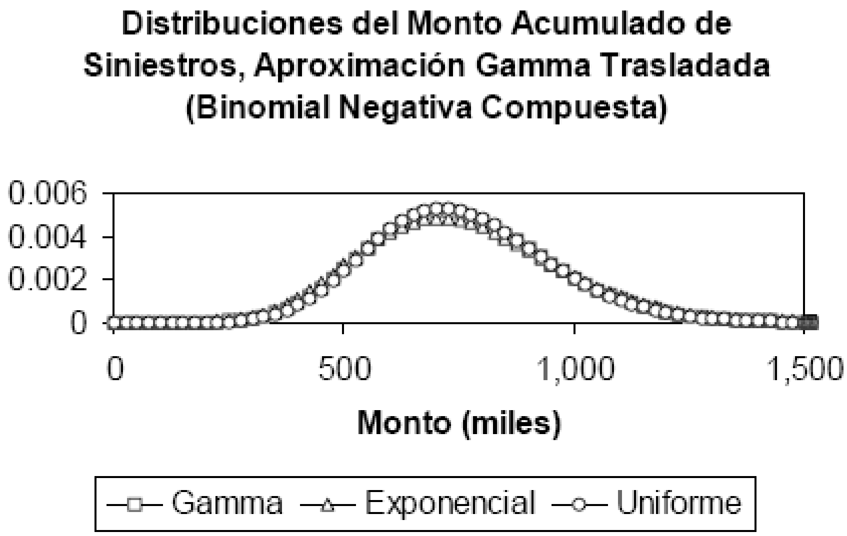


Distribuciones del Monto Acumulado de Siniestros, Aproximación Normal (Binomial Negativa Compuesta)



Distribuciones del Monto Acumulado de Siniestros, Aproximación Gamma Trasladada (Poisson Compuesta)





Debido a que en la Aproximación Normal las distribuciones compuestas que resultan al utilizar distribuciones Gamma y Pareto para el monto individual de siniestros son idénticas, y debido a que en la Aproximación Gamma Trasladada no se puede obtener la distribución compuesta para el caso en que se utiliza una distribución Pareto ya que el parámetro θ , es menor que 3 (en este ejemplo) y por lo tanto no se puede obtener el tercer momento, no se mostró la distribución compuesta para el caso cuando se utiliza la distribución Pareto.

A simple vista se puede uno percatar que el ajuste de la Gamma Trasladada, para este ejemplo, es mejor que el de la Normal (respecto a las distribuciones que se obtienen usando el Algoritmo de Panjer) debido a que el primero conserva el sesgo que se tiene cuando se utiliza una distribución Binomial Negativa. Para hacer una comparación más objetiva veamos cuales son los resultados que se obtienen desde el punto de vista de la Reaseguradora con estos tres métodos[16]:

[16] Algoritmo de Panjer, Aproximación Normal y Aproximación Gamma Trasladada. El caso de el primer Método planteado en el Capítulo Dos sin obtener la distribución Compuesta arroja los mismos resultados para el valor esperado de los siniestros que el Método utilizando el Algoritmo de Panjer.

Prioridad: $800,000.00
Capacidad: $1'200,000.00
Factor de Seguridad: 20%

Poisson Compuesta:

Algoritmo de Panjer, Punto de Vista Reaseguradora				
	Gamma	Exponencial	Pareto	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	31,937	39,037	30,562	28,876
Desv. Estándar	62,085	73,565	63,344	56,843
Recargo de Seguridad	12,417	14,713	12,668	11,368
Prima de Stop Loss	44,354	53,750	43,231	40,244

Aproximación Normal, Punto de Vista Reaseguradora				
	Gamma	Exponencial	Pareto	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	31,625	38,856	31,625	28,710
Desv. Estándar	58,540	70,248	58,540	54,554
Recargo de Seguridad	11,708	14,049	11,708	10,910
Prima de Stop Loss	42,973	52,905	42,973	39,620

Aproximación Gamma Trasladada, Punto de Vista Reaseguradora			
	Gamma	Exponencial	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	31,384	39,576	29,172
Desv. Estándar	61,979	75,375	54,179
Recargo de Seguridad	12,395	15,075	11,435
Prima de Stop Loss	44,229	54,651	40,607

Binomial Negativa Compuesta

Algoritmo de Panjer, Punto de Vista Reaseguradora				
	Gamma	Exponencial	Pareto	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	59,297	64,578	58,275	57,128
Desv. Estándar	109,597	118,698	109,415	106,119
Recargo de Seguridad	21,919	23,739	21,883	21,224
Prima de Stop Loss	81,216	88,317	80,158	78,352

Aproximación Normal, Punto de Vista Reaseguradora				
	Gamma	Exponencial	Pareto	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	58,277	63,520	58,277	56,597
Desv. Estándar	99,663	107,523	99,663	97,138
Recargo de Seguridad	19,932	21,504	19,932	19,427
Prima de Stop Loss	78,210	85,025	78,210	76,024

Aproximación Gamma Trasladada, Punto de Vista Reaseguradora			
	Gamma	Exponencial	Uniforme
Valor Esperado de Siniestros	59,213	64,475	57,320
Desv. Estándar	109,528	118,648	106,532
Recargo de Seguridad	21,905	23,729	21,306
Prima de Stop Loss	81,119	88,205	78,826

En términos generales se podría decir que la Aproximación Gamma Trasladada se aproxima mejor a los resultados que se obtienen con el Algoritmo de Panjer que la Aproximación Normal; sin embargo, esto no significa que los resultados que se obtienen con la Aproximación Gamma Trasladada o con el Algoritmo de Panjer sean mejores, hay que recordar que todos estos métodos son aproximaciones a la distribución y para obtener los resultados se utilizaron varios supuestos. Desde un punto de vista particular, considero que en caso de que no se pueda utilizar el Algoritmo de Panjer, se utilice la aproximación Gamma Trasladada ya que esta conserva el sesgo que podría presentarse en las distribuciones reales del monto de siniestros acumulados.

Resulta evidente que la Prima de Stop Loss es más alta cuando se utiliza la distribución Binomial Negativa que cuando se utiliza la distribución Poisson, este resultado es también obvio ya que como lo mencionamos anteriormente al obtener la distribución Binomial Negativa a través de la Poisson, se esta añadiendo varianza a la distribución compuesta, lo que se ve reflejado en el valor esperado y varianza a cargo de la Reaseguradora; es decir, la cola de la derecha de la distribución compuesta es más larga y por lo tanto existe más probabilidad de que la Compañía Reaseguradora se vea afectada.

Como se dijo al inicio, el objetivo de este trabajo era llegar a conocer cual era el riesgo que corrían la Aseguradora y Reaseguradora y brindar información suficiente a la Compañía Cedente para que pudiese tomar una decisión tal, que optimizara su utilidad.

Para presentar la información a la Compañía Cedente, supondremos que el número de siniestros sigue una distribución Binomial Negativa y que el monto de los siniestros individuales siguen una distribución Gamma, la información que se tomó en cuenta para obtener los resultados se encuentra en el Anexo III.

Valor Esperado de los Siniestros: 755,250
Varianza Esperada de los Siniestros: 38’851,948,125

Prioridad	Capacidad	E(Si)	E(Sr)	Var(Si)	$\{Var(Si)\}^{1/2}$	Var(Sr)	$\{Var(Sr)\}^{1/2}$
700,000	900,000	647,687	107,563	7,345,226,145	85,704	20,273,167,748	142,384
700,000	1,100,000	647,669	107,581	7,340,595,324	85,677	20,304,038,488	142,492
700,000	1,300,000	647,668	107,582	7,340,287,748	85,675	20,306,669,086	142,501
700,000	1,500,000	647,667	107,583	7,340,270,742	85,675	20,306,847,560	142,502
700,000	1,700,000	647,667	107,583	7,340,269,938	85,675	20,306,857,591	142,502
800,000	1,000,000	695,954	59,296	14,556,605,237	120,651	12,009,078,588	109,586
800,000	1,100,000	695,953	59,297	14,556,253,769	120,649	12,011,045,719	109,595
800,000	1,200,000	695,953	59,297	14,556,168,219	120,649	12,011,579,744	109,597
800,000	1,300,000	695,953	59,297	14,556,148,284	120,649	12,011,717,150	109,598
800,000	1,400,000	695,953	59,297	14,556,143,823	120,649	12,011,750,827	109,598
900,000	900,000	725,792	29,458	22,587,067,425	150,290	6,054,193,521	77,809
900,000	1,000,000	725,791	29,459	22,586,575,059	150,288	6,056,019,753	77,820
900,000	1,100,000	725,791	29,459	22,586,454,790	150,288	6,056,519,059	77,824
900,000	1,200,000	725,791	29,459	22,586,426,678	150,288	6,056,648,288	77,824
900,000	1,300,000	725,791	29,459	22,586,420,368	150,288	6,056,680,117	77,825

Prioridad	Capacidad	2*Cov(Si,Sr)	PSL	Prima Retenida Aseguradora	Varianza Reducida PSL
700,000	900,000	11,233,554,232	136,040	813,960	231,599
700,000	1,100,000	11,207,314,313	136,080	813,920	231,566
700,000	1,300,000	11,204,991,291	136,083	813,917	231,562
700,000	1,500,000	11,204,829,823	136,083	813,917	231,562
700,000	1,700,000	11,204,820,596	136,083	813,917	231,562
800,000	1,000,000	12,286,264,300	81,213	868,787	299,156
800,000	1,100,000	12,284,648,637	81,216	868,784	299,150
800,000	1,200,000	12,284,200,163	81,216	868,784	299,149
800,000	1,300,000	12,284,082,690	81,217	868,783	299,148
800,000	1,400,000	12,284,053,475	81,217	868,783	299,148
900,000	900,000	10,210,687,180	45,020	904,980	361,284
900,000	1,000,000	10,209,353,313	45,023	904,977	361,268
900,000	1,100,000	10,208,974,276	45,024	904,976	361,263
900,000	1,200,000	10,208,873,159	45,024	904,976	361,262
900,000	1,300,000	10,208,847,640	45,024	904,976	361,262

Prioridad	Capacidad	Utilidad Aseguradora	Utilidad % Esperada Aseguradora	Probabilidad de Ruina Aseg.	Probabilidad de Ruina Reaseg.
700,000	900,000	166,273.23	17.50%	0.01%	31.92%
700,000	1,100,000	166,251.55	17.50%	0.00%	31.92%
700,000	1,300,000	166,249.71	17.50%	0.00%	31.92%
700,000	1,500,000	166,249.58	17.50%	0.00%	31.92%
700,000	1,700,000	166,249.57	17.50%	0.00%	31.92%
800,000	1,000,000	172,832.81	18.19%	0.00%	24.76%
800,000	1,100,000	172,831.02	18.19%	0.00%	24.76%
800,000	1,200,000	172,830.53	18.19%	0.00%	24.76%
800,000	1,300,000	172,830.40	18.19%	0.00%	24.76%
800,000	1,400,000	172,830.37	18.19%	0.00%	24.76%
900,000	900,000	179,188.26	18.86%	0.00%	16.40%
900,000	1,000,000	179,185.91	18.86%	0.00%	16.40%
900,000	1,100,000	179,185.27	18.86%	0.00%	16.40%
900,000	1,200,000	179,185.11	18.86%	0.00%	16.40%
900,000	1,300,000	179,185.06	18.86%	0.00%	16.40%

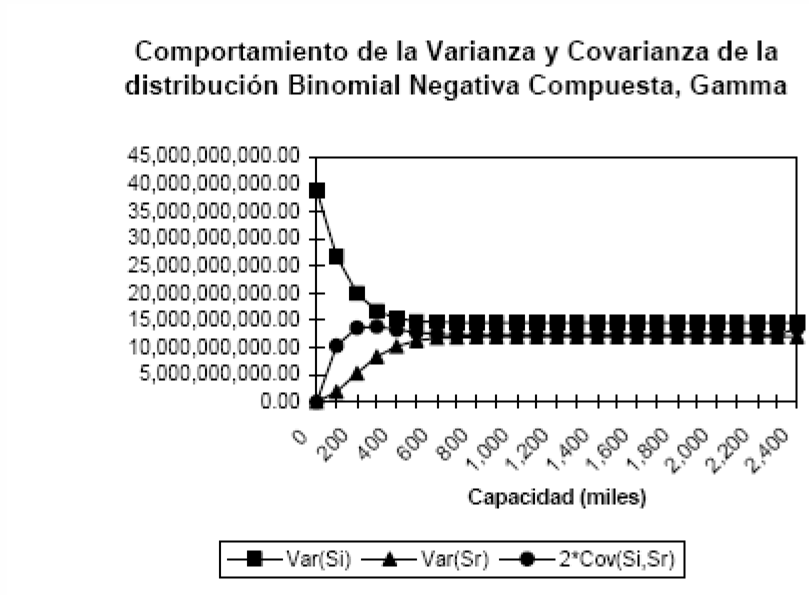
Como podemos ver, una opción que resulta atractiva es: prioridad igual a 900,000 y capacidad igual a 1'100,000 ya que la utilidad esperada de la aseguradora se maximiza. La Utilidad esperada se obtuvo de la siguiente manera:

Utilidad Esperada = Prima Neta Retenida-Valor Esperado de los Siniestros a pagar.

El hecho de que se maximice la utilidad en el punto mencionado, resulta fácil de explicar ya que la prima de Stop Loss que cobra la Compañía Reaseguradora no es únicamente el valor esperado de los siniestros a su cargo, sino que también lleva incluido un recargo por seguridad. De esta manera, la opción que debería escoger la Compañía Aseguradora para maximizar su utilidad será de acuerdo a la función de utilidad que ésta tenga más aparte ciertas restricciones; es decir que tanto esta dispuesta la Compañía Aseguradora a pagar para disminuir una unidad de varianza.

Como ya se dijo anteriormente, el Reaseguro de Stop Loss no es una cobertura muy deseada por las Compañías Reaseguradoras ya que existe el riesgo adicional de que la Compañía Aseguradora haga más flexibles los criterios de suscripción. Para evitar esto, se podría implementar un Coaseguro de manera que si el monto de los siniestros sobrepasa la Prioridad, la Compañía Aseguradora participa en forma adicional en un X% de los siniestros en exceso de la Prioridad. Este mecanismo ayuda a mantener la comunidad de suerte entre ambas partes y dar confianza al reasegurador para que la selección de riesgo se mantenga en buen nivel.

La probabilidad de ruina significa la probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima neta retenida. La utilidad % esperada de la aseguradora representa el porcentaje de utilidad en función de la prima neta cobrada a la colectividad. A continuación se muestra una gráfica que muestra el comportamiento de la distribución Binomial Negativa Compuesta con distribución Uniforme. Para este ejemplo se ha considerado un Prioridad de $800,000.00.



Se puede observar que la Cov(Si, Sr) alcanza un máximo y después permanece estable al igual que la varianza de ambas partes. Esto también significa que la Prima de Stop Loss va a alcanzar un punto máximo por lo que teóricamente daría casi lo mismo otorgar una Capacidad de \$1’000,000 que otorgar Capacidad Ilimitada; sin embargo, desde el punto de vista del Reasegurador este tipo de contratos con capacidad ilimitada conllevan un alto riesgo por lo que la sugerencia de aplicar un coaseguro aparece otra vez como solución.

A continuación se muestran los resultados que se obtienen si suponemos que el Reaseguro de Stop Loss se combina con un Coaseguro del 15% que se aplica a los montos que exceden de la Prioridad y que están a cargo del reasegurador. Los supuestos utilizados siguen siendo los mismos que hemos utilizado a lo largo de este ejemplo práctico.

Valor Esperado de los Siniestros: 755,250
Varianza Esperada de los Siniestros: 38’851,948,125

Prioridad	Capacidad	E(Si)	E(Sr)	Var(Si)	$\{Var(Si)\}^{1/2}$	Var(Sr)	$\{Var(Sr)\}^{1/2}$
700,000	900,000	663,821	91,429	9,494,702,365	97,441	14,647,363,698	121,026
700,000	1,100,000	663,806	91,444	9,486,830,147	97,400	14,669,667,808	121,118
700,000	1,300,000	663,805	91,445	9,486,233,307	97,397	14,671,568,415	121,126
700,000	1,500,000	663,805	91,445	9,486,196,096	97,397	14,671,697,362	121,127
700,000	1,700,000	663,805	91,445	9,486,194,133	97,397	14,671,704,610	121,127
800,000	1,000,000	704,849	50,401	16,678,045,960	129,144	8,676,559,280	93,148
800,000	1,100,000	704,848	50,402	16,677,496,404	129,141	8,677,980,532	93,156
800,000	1,200,000	704,848	50,402	16,677,355,598	129,141	8,678,366,365	93,158
800,000	1,300,000	704,848	50,402	16,677,321,134	129,141	8,678,465,641	93,158
800,000	1,400,000	704,848	50,402	16,677,313,048	129,141	8,678,489,973	93,158
900,000	900,000	730,211	25,039	24,263,186,666	155,766	4,374,154,819	66,137
900,000	1,000,000	730,210	25,040	24,262,535,310	155,764	4,375,474,272	66,147
900,000	1,100,000	730,210	25,040	24,262,369,421	155,764	4,375,835,020	66,150
900,000	1,200,000	730,210	25,040	24,262,329,048	155,764	4,375,928,388	66,151
900,000	1,300,000	730,210	25,040	24,262,319,627	155,764	4,375,951,385	66,151

Prioridad	Capacidad	2*Cov(Si,Sr)	PSL	Prima Retenida Aseguradora	Varianza Reducida PSL
700,000	900,000	14,709,882,063	115,634	834,366	253,881
700,000	1,100,000	14,695,450,170	115,668	834,332	253,875
700,000	1,300,000	14,694,146,404	115,670	834,330	253,874
700,000	1,500,000	14,694,054,667	115,671	834,329	253,874
700,000	1,700,000	14,694,049,382	115,671	834,329	253,874
800,000	1,000,000	13,497,342,885	69,031	880,969	321,217
800,000	1,100,000	13,496,471,189	69,033	880,967	321,214
800,000	1,200,000	13,496,226,162	69,034	880,966	321,213
800,000	1,300,000	13,496,161,350	69,034	880,966	321,213
800,000	1,400,000	13,496,145,104	69,034	880,966	321,213
900,000	900,000	10,214,606,640	38,267	911,733	381,239
900,000	1,000,000	10,213,938,543	38,270	911,730	381,228
900,000	1,100,000	10,213,743,684	38,270	911,730	381,224
900,000	1,200,000	10,213,690,688	38,271	911,729	381,223
900,000	1,300,000	10,213,677,113	38,271	911,729	381,223

Prioridad	Capacidad	Utilidad Esperada Aseguradora	Utilidad % Esperada Aseguradora	Probabilidad de Ruina Aseg.	Probabilidad de Ruina Reaseg.
700,000	900,000	170,544.74	17.95%	0.03%	31.92%
700,000	1,100,000	170,526.32	17.95%	0.03%	31.92%
700,000	1,300,000	170,524.75	17.95%	0.03%	31.92%
700,000	1,500,000	170,524.64	17.95%	0.03%	31.92%
700,000	1,700,000	170,524.64	17.95%	0.03%	31.92%
800,000	1,000,000	176,120.39	18.54%	0.52%	24.76%
800,000	1,100,000	176,118.86	18.54%	0.52%	24.76%
800,000	1,200,000	176,118.45	18.54%	0.52%	24.76%
800,000	1,300,000	176,118.34	18.54%	0.52%	24.76%
800,000	1,400,000	176,118.32	18.54%	0.52%	24.76%
900,000	900,000	181,522.52	19.11%	13.09%	16.40%
900,000	1,000,000	181,520.53	19.11%	13.09%	16.40%
900,000	1,100,000	181,519.98	19.11%	13.09%	16.40%
900,000	1,200,000	181,519.84	19.11%	13.09%	16.40%
900,000	1,300,000	181,519.81	19.11%	13.09%	16.40%

Como se puede observar, la probabilidad de ruina del asegurador, ha aumentado significativamente cuando la Prioridad es igual a $900,000.00, esto se debe a que la prima retenida por la aseguradora ligeramente sobrepasa a la Prioridad y entonces existe una probabilidad no despreciable de que el monto de los siniestros a cargo del asegurador por concepto del coaseguro haga que el monto total (Stop Loss y Coaseguro) de siniestros a cargo del asegurador sobrepase la prima neta retenida.

Desde luego, al aplicar el coaseguro es lógico que la Prima de Stop Loss disminuya, pero lo más importante es que el asegurador corre riesgo también en la parte excedente a la prioridad por lo que la comunidad de suerte se mantiene.

La parte de la varianza, $2 \times Cov(S_i , S_r)$, que desaparece por efectuarse el contrato de Stop Loss ha aumentado. Esto también es un punto a favor para optar por este tipo de cobertura en comparación con una cobertura de Stop Loss pura.

4.2 Observaciones

1. La Prima de Stop Loss que se obtuvo en este trabajo representa el valor esperado del monto de los siniestros a cargo del reasegurador más un recargo por seguridad que es igual a un cierto porcentaje (factor de seguridad) de la desviación estándar del riesgo asumido por el reasegurador. Este factor de seguridad puede ser fijado por el reasegurador de acuerdo a sus políticas o bien, por la competencia en precios del mercado.

2. En este trabajo se han obtenido cuatro métodos para obtener el valor esperado de distribuciones compuestas en partes truncadas. El primer método: Valor Esperado de los Siniestros sin obtener la distribución del monto total de los siniestros, no es adecuado para obtener la Prima de Stop Loss, ya que no se puede calcular el recargo por seguridad que esta en función de la varianza. Respecto a los otros tres métodos, se aconseja primero utilizar el Algoritmo de Panjer para obtener la distribución compuesta del número de siniestros.

En casos en que no pueda ser aplicado el Algoritmo de Panjer por efectos de tiempo en los cálculos[17], se recomienda utilizar la aproximación de la Gamma Trasladada ya que mantiene el sesgo que se podría presentar en distribuciones compuestas. Desde luego, como hemos dicho, existen otros métodos para calcular distribuciones compuestas.

3. La información suficiente para calcular la prima de Stop Loss representa solo una parte de la información necesaria para llevar a cabo un contrato de Stop Loss. Aparte de la información utilizada en el presente trabajo para calcular la Prima de Stop Loss, es necesario conocer perfectamente el riesgo que se esta cubriendo ya que de lo contrario se podrían aceptar riesgos que conlleven a una desviación en siniestralidad ocasionada por las condiciones del contrato de seguro más que por desviaciones aleatorias. Un ejemplo de esto, podría ser el brindar una cobertura de Stop Loss en un Seguro de Transplante de Organos donde no están excluidas las enfermedades preexistentes.

   La información necesaria para la cotización de una cobertura de Stop Loss es:

   - Experiencia en siniestralidad (incluyendo número de asegurados y número de siniestros) para comparar el "Burning Cost" contra la Prima Teórica.
   - Exclusiones y límites de la cobertura, se debe conocer a fondo el riesgo aceptado.
   - Número de asegurados y número esperado de siniestros.
   - Distribución del monto de los siniestros individuales, si no se cuenta con la distribución al menos conocer los dos primeros momentos centrales.
   - Inflación de siniestralidad futura, así como la inflación de siniestralidad en años pasados para poder evaluar correctamente el riesgo a cubrir.
   - Se debe saber si la información proporcionada contempla reservas IBNR, en caso de no ser así se debe conocer una estimación de dicha reserva.
   - Prima Neta Cobrada.

4. En caso de contar con distribución empírica del monto de los siniestros individuales, ésta podría ser utilizada para calcular la Prima de Stop Loss sin necesidad de ajustar alguna distribución analítica.

5. En algunas ocasiones no será posible utilizar la distribución Pareto en el monto de los siniestros individuales para aproximar la Distribución Compuesta del monto acumulado de siniestros por el método de la distribución Gamma Trasladada. Esto se debe a que en dicha aproximación es necesario conocer los tres primeros momentos de la distribución del monto de siniestros individuales y en la distribución Pareto estos no siempre existen.

6. Se ha demostrado en este trabajo que el Reaseguro de Stop Loss tiene un incentivo económico, ya que parte de la varianza original del Portafolio desaparece al celebrarse el contrato de Reaseguro, la parte de la varianza que desaparece es igual a 2Cov(Si, Sr) (,) . También se demostró que la Cov(Si, Sr) siempre toma valores positivos.

7. Como mencionamos en el Capítulo Dos, parte de estos resultados ya habían sido analizados por Karl Borch, en el libro "The Mathematical Theory of Insurance", tomando en cuenta un Reaseguro de Stop Loss con Capacidad Ilimitada, de esta manera, algunos resultados que se presentan en este trabajo son tan sólo extensión de lo ya dicho por Karl Borch.

[17] P.W. den Iseger, M.A.J. Smith, R. Dekker, 1997, Computing compound distributions faster!, Insurance Mathematics & Economics.

8. La Prima de Stop Loss que calculamos, se obtiene desde el punto de vista de la oferta; es decir, lo que se presenta es un menú en donde la Compañía Aseguradora puede seleccionar la opción que más le convenga y con la cual maximize su utilidad. Al respecto, el Dr. Harry Panjer[18], ha propuesto un método para calcular primas desde el punto de vista de la oferta y de la demanda.

9. Como hemos mencionado, en el presente trabajo se han mostrado resultados con los cuales la Compañía Aseguradora puede elegir la opción que más le convenga a partir de cierta función de utilidad; sin embargo, no se ha dicho como obtener dicha función de utilidad ni como emplearla con los resultados que se presentan. Esto no significa que el trabajo este incompleto, de hecho, una institución podría comportarse de acuerdo a alguna función de utilidad sin conocer en forma analítica dicha función.

10. Las herramientas utilizadas en este trabajo no se aplican únicamente al Reaseguro de Stop Loss; de hecho, estas podrían ser utilizadas en el modelo colectivo a largo plazo, un ejemplo de esta aplicación podría ser el análisis de un seguro de gastos médicos a largo plazo, con prima nivelada. Este producto no es muy común en México, de hecho, una razón por la que no se ofrece es debido a la economía inestable de este país, pero en países con una economía estable se puede encontrar este tipo de productos, tal es el caso de Alemania.

[18] Shaun S. Wang, Virginia R. Young, Harry Panjer; 1997, Axiomatic charaterization of insurance prices; Insurance & Economics.

Anexo I

Deducción de la Fórmula de Recurrencia de Panjer

En este anexo se deduce en forma analítica la fórmula de recurrencia de Panjer:

$$f_j = \frac{1}{1 - a \cdot g_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{i \cdot b}{j} \right) \cdot g_i \cdot f_{j-i}$$

Esta fórmula sirve para aproximar de manera discreta la función de densidad del monto acumulado de los siniestros individuales (S); es decir:

$$S = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

Donde N representa el número de siniestros y sigue una distribución que cumple con la siguiente característica:

$$p_k = (a + b / k) p_{k-1}$$

donde p_k representa la probabilidad de que el número de siniestros sea k.

Por su parte, Z_t es la variable aleatoria que representa el monto del siniestro individual *t*. Z_t sólo puede tomar valores no negativos, discretos y equidistantes. La probabilidad de que el monto de un siniestro tome un determinado valor se denota por g_i.

$$g_i = Prob\{Z = i \cdot M\}$$

Donde *i*={0,1,2,…r}, de esta forma $\sum_{i=0}^{r} g_i = 1$.
Sin pérdida de generalidad, asumamos que M=1.

Sea:

$$g_j^{k*} = \Pr ob\{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k = j\}$$

en particular:

$$g_0^{0*} = 1 \ \text{ y } \ g_j^{0*} = 0, \ \text{si } j > 0$$

entonces:

$$g_j^{k*} = \sum_{i=0}^{j} g_i \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}$$

Ahora bien, ya que las variables aleatorias Z_t se distribuyen idénticamente, tenemos:

$$E\left(Z_1 | \sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right) = \frac{1}{k} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i | \sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right) = \frac{j}{k} \qquad \text{para toda } k>0. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$E\left(Z_1 | \sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right) = \sum_{i=1}^{j} i \cdot Prob\left\{Z_1 = i | \sum_{m=1}^{k} Z_m = j\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{j} i \cdot Prob\left\{Z_1 = i \text{ y } \sum_{m=2}^{k} Z_m = j - i\right\}}{Prob\left\{\sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right\}}$$

dado que las Z_t son independientes, tenemos:

$$E\left(Z_1 | \sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right) = \frac{\sum_{i=1}^{j} i \cdot g_i \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}}{g_j^{k*}} \qquad (2)$$

Por (1) y (2) llegamos a la siguiente igualdad:

$$g_j^{k*} = \frac{k}{j} \sum_{i=1}^{j} i \cdot g_i \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}$$

Ahora bien:

$$f_j = Prob\{X = j\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot g_j^{k*} = \sum_{k=1}^{\infty} (a + b / k) \cdot p_{k-1} \cdot g_j^{k*}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot p_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{j} g_i \cdot g_{j-i}^{(k-1)*} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{j} \cdot p_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{j} i \cdot g_i \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}$$

$$= a \sum_{i=0}^{j} g_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} \cdot g_{j-i}^{(k-1)*} + \frac{b}{j} \sum_{i=1}^{j} i \cdot g_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}$$

$$= a \cdot g_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} \cdot g_j^{(k-1)*} + \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{b \cdot i}{j}\right) \cdot g_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} \cdot g_{j-i}^{(k-1)*}$$

$$= a \cdot g_0 \cdot f_j + \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{b \cdot i}{j}\right) \cdot g_i \cdot f_{j-i}$$

$$\Rightarrow f_j = \frac{1}{1 - a \cdot g_0} \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{b \cdot i}{j}\right) \cdot g_i \cdot f_{j-i}$$

ya que g_i sólo toma valores mayores que 0 para $i \le r$, se puede limitar la suma hasta *min(j,r)*.

El valor de f_0 se determina fácilmente por la siguiente expresión:

$$f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot g_0^{k*}$$

Función de Visual Basic para Anexarse a una Hoja de Cálculo (Fórmula de Recurrencia)

```
Sub Recurrencia()
         j = 1
        a = Sheets("________").Cells(_, _)
        b = Sheets("________").Cells(_, _)
        Max = Sheets("________").Cells(_, _)
        fj = 0
        i = 1
        r= Sheets("________").Cells(_, _)
        g0 = Sheets("________").Cells(_, _)
        Do While j < Max + 1
            i = 1
             Do While i <= j And i < r
                g = Sheets("________").Cells(i + _, _).Value
                fj = Sheets("________").Cells(j - i + _, _).Value
                suma = suma + g * fj * (a + (i * b) / j)
                i = i + 1
             Loop
            Sheets("________").Cells(j + _, _).Value = suma / (1 - a * s0)
            suma = 0
            k = k + 1
        Loop


End Sub
```

Anexo II

En este anexo se demuestra que la esperanza de la distribución discretizada utilizando el método planteado en la página 37, es igual a la esperanza de la distribución original.

Para demostrar lo anterior, asumiremos sin pérdida de generalidad, que la amplitud del intervalo M que determina los posibles valores de la distribución discretizada es igual a 1.

Definiciones:

$$\Delta_i = (i-1, i]$$

$$d_i = Prob\{Z \in \Delta_i\} = l_i + r_{i-1} \quad (1)$$

$$e_i = d_i \cdot E(Z|Z \in \Delta_i) = \Pr ob\{Z \in \Delta_i\} \cdot E(Z|Z \in \Delta_i) \quad (2)$$

Ya que:

$i - 1 \leq E(Z|Z \in \Delta_i) \leq i$, se tiene que: $(i-1) \cdot d_i \leq e_i \leq i \cdot d_i$

$\Rightarrow \quad 0 = i \cdot d_i - i \cdot d_i \leq i \cdot d_i - e_i = r_{i-1} \leq i \cdot d_i - (i-1) \cdot d_i = d_i$

Por lo tanto:

l_i, r_i y g_i son no-negativos para toda i.

Ya que todo valor posible pertenece a algún intervalo Δ_i, es claro que $\sum g_i = \sum d_i = 1$, por lo que se demuestra que $\{g_i\}_i$ es una función de probabilidad discreta.

El valor esperado de Z se obtiene de la siguiente manera:

$$E(Z) = \sum \Pr ob\{Z \in \Delta_i\} \cdot E(Z|Z \in \Delta_i) = \sum e_i \quad (3)$$

Por otra parte, el valor esperado de la variable discreta con función de probabilidad $\{g_i\}_i$ es:

$$\sum_i i \cdot g_i = \sum_i i \cdot r_i + i \cdot l_i = \sum_i i \cdot l_i + (i-1) \cdot r_{i-1}$$

por (1) y (2)

$$= \sum_i i \cdot (l_i + r_{i-1}) - r_{i-1} = \sum_i i \cdot d_i - r_{i-1} \quad (4)$$

Ya que $e_i = i \cdot d_i - r_{i-1}$, (3) y (4) son iguales. *L.Q.Q.D.*

BIBLIOGRAFÍA

-Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman J; et. al..
Actuarial Mathematics
The Society of Actuaries, Illinois, 1986.

-Fernández Dirube, Ariel.
Manual de Reaseguros
Biblioteca General Re, Vol. 2, Argentina, 1993

-Daykin, C.; Pentikäinen,T.; Pesonen,M.
Practical Risk Theory for Actuaries
Chapman of Hall, England, 1996.

-Borch, Karl.
The Mathematical Theory of Insurance
Heath and Company, USA, 1974.

-La Torre Llorens, Luis.
Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora.
Editorial MAPFRE, Madrid, 1992.

-Mood, A.; Graybill,F.; Boes, D.
Introduction to the Theory of Statistics.
Mc. Grawhill, Singapore, 1974.

-Act Rendón E, Jorge.
Políticas para la Administración del Seguro de Vida.
ITAM, México, 1996.

-Wany, Shaun S.; Young, Virginia R; Panjer, Harry H.
Axiomatic characterization of insurance prices
Insurance, Mathematics & Economics 21 (1997), 173-183
Netherlands, 1997.

-Dr. Heinen, Winfried.
Aplicación de la Teoría de credibilidad en el Seguro de Vida Grupo.
La Kölnische Rück, México, 1993.

-Dr. Heinen, Winfried.
Experiencia Propia vs. Costo Garantizado.
La Kölnische Rück, México, 1996

-Den Isenger,P.W.; MAS Dekker, Smith R.
Computing compound distributions faster!.
Insurance, Mathematics & Economics 20 (1997), 23-34 Netherlands, 1997.

Nota:

- Este Documento obtuvo el Segundo Lugar del Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas 1998. Las opiniones que aparecen en este artículo son del autor y no necesariamente coinciden con las de la C.N.S.F.