



# Modelos de la Teoría de Riesgo para la Solvencia del Sector Asegurador

Trabajo presentado para el IV Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas, 1997

Diego Hernández Rangel \*



COMISIÓN NACIONAL DE  
SEGUROS Y FIANZAS

# IV

Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas 1997

Segundo Lugar  
Categoría de Seguros

## Introducción

La definición, modelamiento, medición y control de la solvencia de las empresas de seguros ha sido durante décadas una de las ocupaciones propias de la ciencia actuarial a nivel mundial. Algunas razones son bastante obvias, pues para una compañía de seguros - como cualquier otra - es vital la prevención de resultados negativos. Sin embargo, en la actualidad el Mercado Asegurador presenta circunstancias que particularmente revisten a este concepto de una consideración especial. La vida económica contemporánea se caracteriza por el surgimiento de corporaciones cada vez mayores, con las cuales las decisiones de consumo de seguros difieren de las posiciones de los clientes de antaño. La capacidad de autoseguro mediante cautivas, la mayor capacidad de retención, la disponibilidad de áreas encargadas de la Administración de Riesgos, la compra de seguros a gran escala y la capacidad de evaluar la calidad y precio de los productos han causado gran impacto entre los aseguradores, que actualmente luchan por segmentos de mercado altamente competitivos y lanzan multitud de productos diseñados para segmentos muy específicos y por consiguiente de menor tamaño, tarifando sus productos cada vez más cercanos a las primas netas y en ocasiones aún por debajo de ellas.

Paradójicamente, a nivel internacional, la necesidad de un control óptimo de los riesgos está acompañado de un deterioro progresivo en las bases de datos. Con la disolución de los grandes asociaciones de empresas de seguros y la suspensión de las oficinas conjuntas para la recopilación de estadísticas, la ventaja de los negocios a gran escala empieza a disminuir<sup>1</sup>. Los recientes casos de insolvencia, en ocasiones difíciles de detectar por la existencia de fusiones, no son una coincidencia. Ante esta situación, el análisis de la solvencia origina nuevos retos para la profesión actuarial, mucho mayores que la valuación de pasivos contingentes y que requieren de mayores aptitudes distintas a las tradicionales. Baste mencionar el caso del cálculo actuarial de vida, que durante décadas parecía contener un cuerpo perfectamente estructurado. Sin embargo, no se trataba de perfección de la técnica actuarial, sino de una situación ideal para las compañías de seguros en las cuales la existencia de primas uniformes en el mercado y grandes recargos de seguridad generaban excelentes resultados. La consecuencia fue un estancamiento de la matemática actuarial de vida que hoy en día muestra sus deficiencias ante la creciente competencia y origina grandes discusiones sobre la evaluación de riesgos de diferentes tipos junto con la correcta asignación de márgenes de solvencia.

Este documento busca en primer lugar, exponer la teoría actuarial de solvencia de una forma útil para las comunidades actuarial y económico-financiera, en los medios tanto académicos como empresariales, fomentando la convergencia en el tratamiento de este concepto fundamental para la correcta operación del seguro. Con esta exposición el lector se encontrará en capacidad para analizar individualmente cada modelo-criterio de solvencia, juzgar sus virtudes y defectos, obteniéndose una base sólida y consistente para estudios posteriores que armonicen los intereses de todos los participantes en el Mercado Asegurador.

El continuo incremento de las interrelaciones económicas, políticas, sociales y culturales a nivel internacional, proceso que hoy denominamos Globalización, ha tenido una clara influencia en las instituciones financieras de nuestro país. Las autoridades reguladoras del sector asegurador, encargadas del sano desarrollo de la industria en beneficio de la sociedad, enfrentan con mayor intensidad el reto de armonizar la regulación con la capacidad de acción de las aseguradoras, su eficiencia y crecimiento, así como garantizar la viabilidad financiera dentro de ciertos parámetros de riesgo. Por este motivo la exposición está orientada especialmente al monitoreo y control de la solvencia de las aseguradoras, mostrando la forma en que la teoría actuarial, en

---

<sup>1</sup> Astin Bulletin, Vol.20, No.1, 1996, Editorial.

conjunción con el análisis financiero, se convierte en una herramienta clave para la desregulación efectiva en el medio.

## Capítulo 1

### Conceptos básicos

*"The most that can in reality be said of a life office is that it will meet the commitments it has currently or prospectively incurred, subject to a range of assumptions and even then only with a degree of probability"*

*Limb, A.P. Desiderata for solvency, Transactions of the 22nd International Congress of Actuaries, 1984.*

Es imposible garantizar la solvencia de una empresa de seguros con absoluta certeza. ¿Debemos considerar únicamente los negocios en curso o también las pólizas a emitirse en el futuro? ¿Qué horizonte debe abarcar? ¿Qué hipótesis y modelos están justificados? ¿Qué riesgos deben considerarse? Finalmente, ¿cuál es una probabilidad aceptable de insolvencia? Estos son elementos que debemos tomar en cuenta si deseamos definir el concepto de solvencia de una forma útil tanto para la investigación como para la eficaz aplicación de los resultados.

### Definición

"Una empresa de seguros es solvente si posee suficientes activos para hacer frente a sus pasivos."

Evidentemente esta definición es aplicable a cualquier tipo de negocio. Sin embargo las empresas de seguros adquieren expresamente variabilidad (riesgo). Los pasivos del negocio de seguro nunca son perfectamente conocidos y se pueden extender a muchos años en el futuro. Continuamente se aceptan nuevos negocios, lo que ocasiona el tratamiento de riesgos heterogéneos y fluctuantes en el tiempo. Por esta razón la solvencia de una aseguradora es un concepto probabilístico y depende de la forma en que el futuro de dicho asegurador es percibido.

Muchas entidades económicas tienen interés en este concepto. Para los asegurados, el cumplimiento de los términos establecidos en la póliza es la consideración principal y en aquellas pólizas con participación en las utilidades existe el interés adicional sobre la adecuación de los dividendos con las expectativas de los asegurados.

Los accionistas de las empresas de seguro buscan maximizar el valor de sus acciones, incluyendo el cumplimiento de sus expectativas relacionadas al pago de dividendos<sup>2</sup>. Con esta intención el asegurador debe operar al mínimo nivel de solvencia posible, pues esto incrementa la tasa de retorno de la inversión. Las expectativas de empleo y salariales de los empleados de la compañía y de sus administradores igualmente están altamente relacionadas.

Los reaseguradores de un asegurador insolvente muestran problemas particulares: Dificultad

---

<sup>2</sup> En realidad estos elementos están más relacionados con la rentabilidad que con la solvencia, pero claramente una situación de insolvencia afectará tanto el pago de dividendos como el valor de la acción.

en el cobro de las primas de reaseguro, cambios en la administración de

la aseguradora, responsabilidad en el pago de siniestros y tal vez la necesidad de acciones coordinadas entre varios reaseguradores.

El efecto en otras empresas de seguros es de gran importancia: En caso de que un asegurador cobre primas inadecuadas, captando asegurados con esta táctica, al resultar insolvente su cartera tendrá que ser redistribuida entre el resto del Mercado y tanto los accionistas como los asegurados demandarán una mayor garantía de solvencia entre los restantes aseguradores. En algunos países, en caso de que la insolvencia afectara a un gran número de pólizas o reclamaciones, un fondo de garantía pudiera entrar en operación, con el cual los aseguradores cubrirían parte de las obligaciones incumplidas, afectando también la solvencia de todo el sector.

Ya hemos señalado que las Autoridades Reguladoras, en México la Secretaría de Hacienda y Crédito Público y la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, están particularmente interesadas en el papel que juega el Mercado Asegurador en el desarrollo de la Economía de los países. Como garantía de la estabilidad de este sistema, están encargadas de implementar los controles adecuados para prevenir insolvencias. Pero estabilidad significa mantener el delicado balance entre seguridad para los participantes y márgenes de rentabilidad aceptables para los inversionistas en la industria.

## Sobre la construcción de modelos de solvencia

El proceso de seguro y con él la solvencia, dependen de muchos factores y circunstancias. Algunos de ellos son endógenos, como el tamaño y composición del portafolio de pólizas, la selección de riesgos, tarificación, valuación de reservas, reaseguro, inversiones, ventas... Otros son exógenos, como las fluctuaciones del mercado asegurador y financiero, inflación, reglamentaciones, cambios estructurales y normativos en la sociedad y en el medio internacional, el grado de actividad en la economía nacional, etc.

Con la finalidad de comprender y controlar este proceso, se debe construir un modelo del que podamos asumir que genera las variables observadas. En esta elaboración deben emplearse las tecnologías e información previas. Por ejemplo, las herramientas de la Teoría de Riesgo sobre el modelamiento de las reclamaciones y los modelos económicos y financieros. Ciertos procedimientos como el cálculo de tarifas y valuación de reservas, pueden aplicarse sin necesidad de modelos de carácter general, sino tal y como son utilizados cotidianamente. De hecho, todos estos cálculos involucran (ya sea que se reconozca o no) hipótesis de los eventos subyacentes, como cierta estabilidad en series de tiempo, en algunos cocientes, la ley de grandes números, etc. En este sentido, toda toma de decisiones siempre se realiza con base en un modelo.

## Incertidumbre en los modelos

En todo modelo, determinístico o probabilístico existen fuentes de incertidumbre. En particular, para modelos de solvencia se debe reconocer el efecto conjunto de las siguientes<sup>3</sup>:

---

<sup>3</sup> Pentikäinen (1989)

- a) El modelo elegido puede no coincidir plenamente con la información del mundo real, simplemente por que desconocemos la realidad y debemos conformarnos con los supuestos del modelo.
- b) La estimación de los parámetros está sujeta a los errores estadísticos provenientes de la fluctuación aleatoria presente en las observaciones.
- c) Finalmente los errores estocásticos, originados en la fluctuación aleatoria y cambios impredecibles que afectan los resultados reales contra los proyectados.

## Solvencia Estática y Solvencia Dinámica

Aquellos modelos/criterios de solvencia que consideran la continuidad del negocio de seguro se denominan de solvencia dinámica<sup>4</sup>, por el contrario, aquellos que consideran la situación financiera del asegurador sin considerar el surgimiento de nuevos negocios se denominan de solvencia estática.

Aún si los nuevos negocios no aportaran utilidad o pérdida a la empresa, existirán diferencias entre los dos criterios, pues la solvencia estática considera que el portafolio de inversiones será liquidado, lo cual no será necesariamente verdadero para los modelos de solvencia dinámica. Un ejemplo de criterios de solvencia dinámica es el Estudio Finlandés de Solvencia, en tanto los estudios de los equipos de trabajo británicos son generalmente de solvencia estática.

Los dos criterios tienen ventajas: En el caso de los de solvencia estática, uno puede argumentar que las aseguradoras no deberían vender más pólizas a menos de que prueben su solvencia sobre los negocios existentes, con la finalidad de evitar que dicha empresa compense los déficits de una línea de negocios con otra más rentable. En el caso de los dinámicos, hay que recordar que las autoridades recopilarán información, la analizarán y tomarán decisiones tiempo después, cuando una buena parte del año ya habrá transcurrido. Así que desde el punto de vista de las autoridades reguladoras, los dos métodos son aplicables; en tanto que los administradores de las empresas utilizarán el de solvencia dinámica, por coincidir con las hipótesis básicas de la Administración.

## Los riesgos a considerar

Sobre este tema existen amplias divisiones entre los criterios:

Algunos métodos únicamente consideran los riesgos de los pasivos (criterio tradicional en la práctica actuarial), en particular la fluctuación a causa de las reclamaciones. Esto parece razonable, pues las empresas que no operan en el negocio de seguros no tienen un margen de solvencia obligatorio, y el único riesgo que distingue a las aseguradoras de otras empresas es precisamente el de las reclamaciones.

Por otro lado, hay métodos que aplican mayor énfasis sobre los riesgos de los activos. Por ejemplo, el método de Campagne para seguros de vida considera que el riesgo de las inversiones es el de mayor importancia en este ramo.

---

<sup>4</sup> En inglés *going concern*

Hoy en día los esfuerzos de la comunidad actuarial se concentran en modelos que tratan por igual a los dos tipos de riesgo, para tratarlos de forma armónica.

## La probabilidad de insolvencia

Con base en lo anterior, se sugiere la existencia de una medida sobre la factibilidad de la solvencia (o insolvencia) sobre todos los modelos considerados, aunque por supuesto no serán directamente comparables, por ejemplo Beard et al (1984) en el capítulo 3 da tres ejemplos típicos: una probabilidad de insolvencia de 0.0001 en un año, o 0.001 sobre 10 años, o 0.01 durante un periodo infinito en el tiempo.

Más aún, el problema de establecer una probabilidad de insolvencia "aceptable" siempre tendrá una solución subjetiva. Por ejemplo 0.01 en un año, significa en términos frecuentistas que una de cada diez empresas resultaría insolvente en un año, lo cual puede ser inaceptable.

En realidad, las aseguradoras operan en un medio dinámico y se adaptan mediante la toma de decisiones de sus administradores, lo cual afecta la solvencia de la empresa. Al establecer un margen de solvencia realmente se está haciendo la hipótesis de que la solvencia depende únicamente de esta decisión, lo cual parece poco factible y tanto la autoridad como el administrador deben estar conscientes de esto.

Sin embargo, los modelos matemáticos de la solvencia son extremadamente útiles, pues:

- a) Permiten un sistema de alerta oportuno;
- b) Identifican los factores de riesgo y permiten el conocimiento detallado de su influencia en la solidez financiera del asegurador;
- c) Dan una mayor comprensión de la forma en que los flujos de efectivo son "procesados" por la empresa;
- d) Permiten la comparación entre empresas de seguros de la forma más objetiva posible.

Precisamente por este último punto resulta indispensable que los criterios de solvencia se apliquen de una forma estándar y uniforme para las empresas, de otro modo la información hacia los accionistas y administradores estaría distorsionada y la toma de decisiones por parte de las autoridades resultaría en criterios no equitativos.

## El Problema de Solvencia desde la perspectiva de la Teoría de Riesgo:

Desde el primer trabajo de Filip Lundberg en 1903, origen de esta rama de la ciencia actuarial conocida como Teoría de Riesgo, se ha mostrado su capacidad para modelar y controlar el grado de fluctuación en los resultados propio del negocio asegurador.

En contraste con este enfoque, los modelos contables, por ejemplo, no reconocen correctamente ni el tiempo en el que se ejercen las obligaciones, ni el grado de variabilidad implícito o la naturaleza de los riesgos cubiertos. Por esta razón la calificación que se otorga a las empresas de acuerdo con estos estándares contables y financieros sí proporciona

información sobre el grado de solidez de la institución, pero ésta solamente cobra sentido al referirla al nivel de riesgo captado por la empresa. En consecuencia, esta calificación es relevante para los accionistas, que pueden realizar la diversificación del riesgo de manera autónoma y basarse en los rendimientos esperados para su toma de decisiones, tal y como indica la teoría financiera de Administración de Portafolios, dejando a las autoridades reguladoras y al administrador de la empresa de seguros en un nivel de incertidumbre que dificulta la toma de decisiones efectivas sobre el negocio.

Pero tampoco el cálculo actuarial tradicional logra este efecto, pues los modelos utilizados son esencialmente estáticos. El problema central en esta disciplina es obtener el "valor presente actuarial" de las obligaciones contingentes de las aseguradoras y de los ingresos futuros de la aseguradora. Dicho valor presente es en esencia un valor esperado o promedio calculado con base en ciertas hipótesis actuariales igualmente estáticas: Las primas únicas, primas niveladas y sistemas de reserva muestran el comportamiento "promedio" del negocio e ignoran el grado de fluctuación tanto por adecuación de las hipótesis como por la incertidumbre del negocio en sí.

El desarrollo de la Teoría de Riesgo y su aplicación ha modificado notablemente la perspectiva de la práctica actuarial, originando modelos y técnicas que permiten complementar al cálculo actuarial tradicional mediante el reconocimiento pleno de los fenómenos aleatorios. Los nuevos textos sobre matemáticas actuariales, como Bowers et al (1986) y Gerber (1995) reorganizan el acervo de conocimientos de la profesión actuarial y permiten un tratamiento óptimo de estos problemas, en particular, la solvencia de las empresas de seguros. De aquí en adelante, la exposición utilizará este enfoque y mostrará su aplicabilidad.

## El Modelo Básico

La evolución económica de un asegurador puede modelarse de acuerdo con la siguiente ecuación al momento  $t$ :

$$P(t) + I(t) = S(t) + G(t) + D(t) + \Delta R(t) \quad (1.1)$$

Donde:  $P(t)$  son las primas pagadas;

$I(t)$  los ingresos netos producto de las inversiones;

$S(t)$  los siniestros agregados;

$G(t)$  gastos;

$D(t)$  dividendos

$\Delta R(t) = R(t-1)$  el incremento (decremento) del margen de solvencia  $R(t)$

Esta última expresión se puede interpretar como la diferencia entre activos y pasivos:

$$R(t) = A - L \quad (1.2)$$

Las expresiones (1.1) y (1.2) resumen la información de los estados financieros que las empresas de seguros deben reportar a las autoridades reguladoras y que en México son publicadas por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Además constituyen la base para la construcción de modelos integrales.

Uno de los principales puntos a analizar es si los activos deben valuarse a precios de Mercado, valor en libros o a aquellos valores a los que, con cierta probabilidad, podrán liquidarse en

caso de ser necesario. Evidentemente los pasivos deben ser valuados de acuerdo con la práctica actuarial estándar, incluyendo asimismo márgenes de seguridad como lo reconoceremos en su momento.

Sustituyendo  $R(t)$  por  $R(t)-R(t-1)$  y dividiendo (1.1) entre  $P(t)$  podemos reexpresar nuestro modelo en términos porcentuales:

$$r(t) = r_{ipg} r(t-1) + 1 + iw(t) - s(t) - g(t) - d(t) \quad (1.3)$$

Donde las expresiones en minúsculas representan los términos anteriormente señalados ahora expresados en proporción de las primas pagadas. Además:

$$r_{ipg} = \frac{(1+i)}{P(t)/P(t-1)} \quad (1.4)$$

es el factor de interés generalizado que sigue la convención usual de textos como *Beard et al (1984)* y expresa el efecto conjunto entre el interés de las inversiones, la inflación y la tasa real.

Finalmente, el producto de las inversiones  $I(t)$  proviene de las reservas técnicas  $W(t)$  y del margen de solvencia.

En los siguientes capítulos se analizarán aquellos elementos del modelo importantes desde el punto de vista actuarial, para finalmente reunirlos en una herramienta objetiva y consistente para el seguimiento del riesgo de insolvencia.

## Capítulo 2

### Siniestros agregados

Para representar el flujo de reclamaciones que genera un portafolio (colectivo) de pólizas en un periodo determinado existen dos enfoques, que en la teoría actuarial se denominan Modelo Individual y Modelo Colectivo, los cuales se expondrán a continuación.

#### 1 Modelo Individual de Riesgo

Sean las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , los montos reclamados por cada una de las  $n$  pólizas del portafolio en consideración. De tal forma que  $X_i$  representa el monto reclamado por la  $i$ -ésima póliza del portafolio. Cada una de estas variables esta definida como:

$$X = \begin{cases} B & \text{con probabilidad de } q \\ 0 & \text{con probabilidad de } (1-q) \end{cases}$$

Donde  $B$  es a su vez la variable aleatoria del monto generado por la  $i$ -ésima póliza, dado que efectivamente se presentó la reclamación (lo cual ocurre con probabilidad  $q$ ).

Al monto total reclamado proveniente de este conjunto de pólizas se denota por:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (2.1)$$

Esta es la variable aleatoria de los siniestros agregados.

Asumiendo independencia entre las variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  la distribución de los siniestros agregados es, en términos de convoluciones<sup>5</sup>:

$$F(s) = F_{X_1} * F_{X_2} * \dots * F_{X_n}(s)$$

Si además los montos de las reclamaciones son idénticamente distribuidos:

$$F_s(s) = F_X^{*n}(s)$$

Donde el lado derecho denota la  $n$ -ésima convolución de la distribución de montos.

El lector podrá observar cómo el Modelo Individual representa perfectamente a los seguros de vida. La diferencia con las matemáticas actuariales tradicionales estriba en que el Modelo Individual no traduce las fluctuaciones por valores constantes, llamados valores presentes actuariales, sino que reconoce la incertidumbre propia del negocio de seguro y permite modelar la solvencia del sistema. En otras palabras, el cálculo actuarial tradicional es insuficiente para analizar el problema de solvencia y es la Teoría de Riesgo el instrumento apropiado para complementarlo.

---

<sup>5</sup> Bowers et al (1986), Cap 2.

## 2. Modelo Colectivo de Riesgo

Bajo este enfoque la estructura de pólizas individuales es ignorada y el portafolio es considerado como un todo. De este modo, únicamente se requiere modelar el número y el monto de las reclamaciones para construir los siniestros agregados:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (2.2)$$

Donde ahora cada  $X_i$  representa el monto de la  $i$ -ésima reclamación en orden cronológico y  $N$  el número total de siniestros del periodo en consideración. Esta variable aleatoria toma valores en  $0, 1, 2, \dots$  y denotaremos su función de probabilidad como  $f_N(n)$ . Todas las variables aleatorias de este modelo son mutuamente independientes.

Mediante la ley de probabilidades totales se encuentra la distribución de los siniestros agregados:

$$\begin{aligned} Pr\{S \leq s\} &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr\{N = n\} Pr\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s | N = n\} \\ F_s(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) F_x^{*n}(s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

A este tipo de distribuciones se les denomina distribuciones compuestas, y su análisis, intensivo en el medio actuarial, puede encontrarse en textos como Beard et al (1984) y Seal (1969).

Sus principales momentos son:

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]E[X] \\ Var[S] &= Var[N]\{E[X]\}^2 + E[N]Var[X] \end{aligned}$$

y la función generadora de momentos:

$$M_s(t) = M_N(\ln M_X(t)) \quad (2.4)$$

El siguiente paso es mostrar qué distribuciones para  $N$  son aplicables para modelar el número de reclamaciones. La Teoría de Riesgo reconoce fundamentalmente tres modelos:

### 2.1 Distribución Binomial:

Considérese el modelo Individual de riesgo  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  (con  $n$  constante) y reexpresese la suma, colocando al principio las  $r$  pólizas que presentaron reclamación (con montos  $B_1, B_2, \dots, B_r$ ) y dejando al final las  $n - r$  pólizas que generaron ninguna reclamación:

$$S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r + O_{r+1} + O_{r+2} + \dots + O_n$$

Obviamente  $O_{r+1} + O_{r+2} + \dots + O_n = 0$  así que obtenemos la suma aleatoria:

$$S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$$

Donde la variable aleatoria  $r$  tiene distribución binomial con parámetros  $n$  y  $q$ . Por consiguiente la distribución de esta suma aleatoria es:

$$F_s(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} F_Y^{*k}(s) \quad (2.5)$$

Con lo cual se llega a una conclusión fundamental: El Modelo Individual de riesgo es un caso particular del Modelo Colectivo, en el cual la distribución de siniestros agregados es Binomial Compuesta y cada póliza puede realizar a lo más una reclamación. Las implicaciones de esto son vastas para el tratamiento de los seguros de vida: podemos modelar cualquier portafolio de pólizas de seguros de vida mediante el Modelo Colectivo de Riesgo, del cual se extrae la herramienta necesaria para analizar la solvencia de la empresa frente a dicho portafolio.

## 2.2 Distribución Poisson

Esta distribución es utilizada cuando el número de reclamaciones satisface las siguientes tres condiciones:

- Independencia de incrementos: Los eventos que ocurren en intervalos disjuntos de tiempo son independientes.
- Estacionariedad de incrementos: El número de eventos en un intervalo de tiempo dependen únicamente de la longitud de dicho intervalo.
- Exclusión de eventos múltiples: La probabilidad de que en un mismo instante en el tiempo ocurran dos o más eventos y la probabilidad de que en un intervalo finito ocurran un número infinito de eventos es cero.

En el apéndice A se muestra que dadas estas tres condiciones la distribución del número de siniestros es Poisson de parámetro  $\lambda$ . La distribución de siniestros agregados será Poisson Compuesta:

$$F_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} F_X^{*n}(s) \quad (2.6)$$

El valor de  $\lambda$  representa el número promedio de siniestros que ocurren durante el periodo en consideración, en otras palabras es la tasa a la cual ocurren los siniestros referida al intervalo de tiempo bajo análisis.

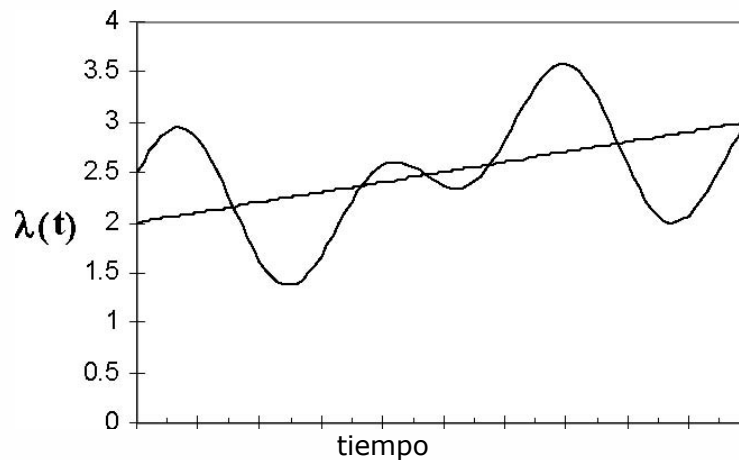
En caso de que dicha tasa varíe durante el año en forma determinística, se puede modelar como una función del tiempo,  $\lambda(t)$ , que nos indica la tasa instantánea a la cual ocurren las reclamaciones. Fácilmente se puede obtener la tasa del periodo mediante la siguiente integral:

$$\lambda \int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du$$

donde  $[t_1, t_2]$  es el intervalo de interés.

Esta situación se presenta cuando el negocio de seguro depende de los ciclos económicos, variables macroeconómicas, número de asegurados o estados de la naturaleza que afecten la siniestralidad. En estos casos se puede encontrar el patrón que obedece la siniestralidad en función del tiempo mediante procedimientos estadísticos (regresión, series de tiempo,...), o mediante modelos provenientes de ciencias auxiliares a la actuarial, como la economía, geología, meteorología, etc.

Figura 2.1  
Comportamiento determinístico de la tasa de ocurrencia de las reclamaciones.



### 2.3 Aditividad de variables Poisson Compuestas

Una de las propiedades que se pueden deducir de esta distribución es la aditividad: La suma de variables Poisson independientes es también Poisson, con parámetro igual a la suma de los parámetros de cada sumando.

Para ilustrar esta situación, considérese un portafolio de pólizas de seguro de vida, en el que la probabilidad de muerte para cada individuo sea  $q_i$ , entonces el número esperado de siniestros en el año será:

$$\lambda = \sum_i q_i \quad (2.8)$$

Esta propiedad es heredada por las variables Poisson Compuestas y permite agregar portafolios de pólizas a nuestro modelo y manejar el detalle necesario sobre la composición de los productos de seguro que opera la empresa de seguros:

Sean  $S_1, S_2, \dots, S_m$  variables Poisson Compuestas independientes, cada una de intensidad  $\lambda_i$ , distribución de montos  $F_i(x)$  con generadora de momentos  $M_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . La función generadora de momentos de la suma de estas variables es:

$$E[e^{t(s_1+s_2+\dots+s_m)}] = \prod_{i=1}^m E[e^{tS_i}] = \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i(M_i(t)-1)} = e^{\sum[\lambda_i(M_i(t)-1)]}$$

y haciendo  $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$  la expresión anterior toma la forma:

$$\exp\left\{\lambda \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1 \right]\right\} \quad (2.9)$$

y esta es la función generadora de momentos de una variable Poisson compuesta con intensidad  $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$  y distribución de montos:

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} f_i(x)$$

En otras palabras, se pueden agrupar riesgos heterogéneos (siempre Poisson Compuestos) y formar un portafolio que será también Poisson Compuesto, donde el número esperado de siniestros es la suma de las intensidades individuales y la distribución del monto será la suma ponderada de las distribuciones individuales. En caso de que se desee modelar un portafolio cuya siniestralidad varíe durante múltiples intervalos en el periodo de observación, también se puede utilizar esta propiedad para obtener la distribución de siniestros durante todo el periodo de observación.

## 2.4 Distribución Poisson como límite de la distribución binomial

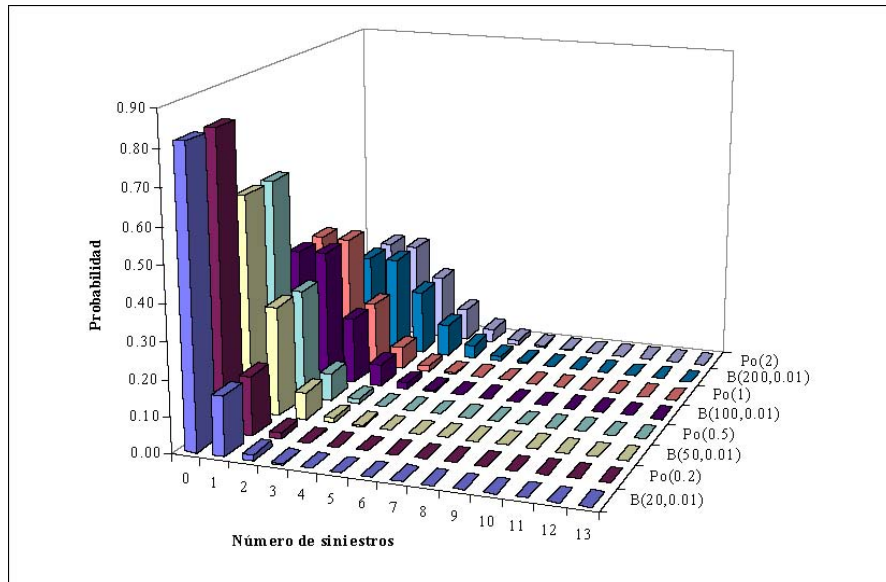
Un resultado conocido en teoría de probabilidad es la obtención de la distribución Poisson como límite de la distribución binomial:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ mq \rightarrow \lambda}} \binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Esto implica que no sólo el Modelo Individual es un caso particular del Colectivo, sino que además, para un número suficientemente grande de pólizas o una probabilidad pequeña de ocurrir un siniestro, la distribución Poisson se ajusta muy bien al modelo original.

En la siguiente figura se ilustra el desempeño de la aproximación Poisson para variables aleatorias binomiales, donde la probabilidad de que ocurra una reclamación es 0.01 y el número de pólizas es de 20, 50, 100 y 200 respectivamente.

Figura 2.2  
Aproximación Poisson para una variable Binomial



## 2.5 Variable estructural y Distribución Binomial Negativa

En ocasiones el comportamiento de la intensidad  $\lambda$  de la variable Poisson no puede precisarse como una constante o como una función determinística del tiempo. Esto puede ocurrir por tres razones:

- El portafolio es heterogéneo, es decir, está formado por riesgos de diferente naturaleza y por tanto, con diferente frecuencia.
- Existe contaminación positiva en el modelo. Esto quiere decir que el hecho de que se presente una reclamación pueda ser evidencia de que otras ocurrirán.
- Fluctuaciones aleatorias de corto plazo en la intensidad.

Cuando se tiene evidencia de cualquiera de estas situaciones, el modelo Poisson puede ser modificado, haciendo que la intensidad del proceso sea a su vez una variable aleatoria (variable estructural) que al tomar valores conserve la distribución original Poisson. Es decir,  $\lambda$  será ahora una variable aleatoria que denotaremos por  $\Lambda$  tal que

$$Pr(N = n | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

y la distribución no condicional se obtiene mediante la ley de probabilidades totales:

$$Pr[N = n] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.13)$$

Además  $E[N] = E[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda]$  por lo que se puede ajustar una distribución a la intensidad y conservar el significado de "tasa promedio de ocurrencia de las reclamaciones".

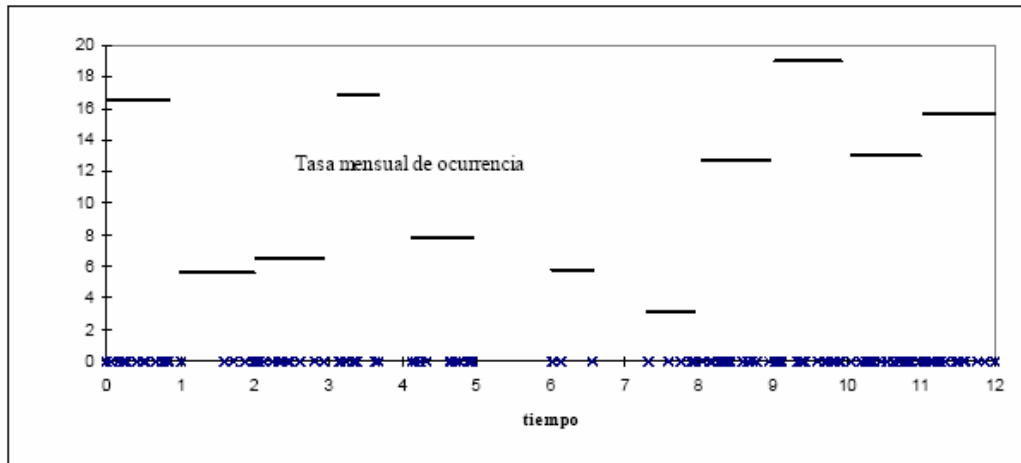
En el caso particular en que  $f_{\Lambda}(\lambda)$  sea la distribución gamma de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , la distribución no condicional es:

$$\begin{aligned} Pr[N = n] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(\beta+1)} \lambda^{\alpha+n-1} d\lambda = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+1)^{\alpha+n}} \quad (2.14) \\ &= \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n \\ &= \binom{\alpha+n-1}{n} p^{\alpha} (1-p)^n \end{aligned}$$

Por tanto, la distribución del número de siniestros es Binomial Negativa con parámetros  $\alpha$  y  $p = \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)$ .

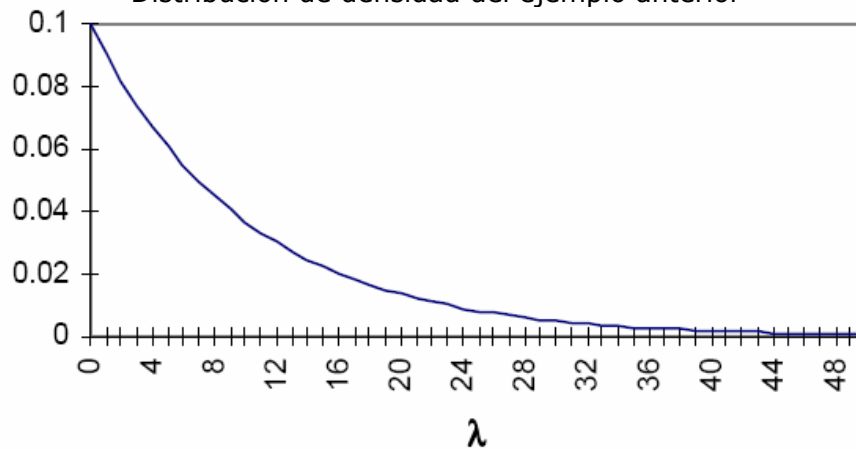
Este resultado permite modelar ocurrencias de reclamaciones que el modelo Poisson no ajustaría correctamente, como lo ilustra la siguiente figura:

Figura 2.3  
Simulación de siniestros con distribución Binomial Negativa



En la figura 2.3, la intensidad mensual del proceso es una variable aleatoria Gamma con media 10 y varianza 100.

Figura 2.4  
Distribución de densidad del ejemplo anterior



Se pueden apreciar meses en los cuales la intensidad es muy pequeña, pero también otros donde es mucho mayor. Por esta razón la distribución binomial negativa permite modelar reclamaciones originadas por epidemias, terremotos, huracanes y otros fenómenos donde existe un "contagio positivo" entre las reclamaciones.

## 2.6 La distribución Poisson como límite de la distribución Binomial Negativa

La distribución Poisson también resulta ser el límite de la Binomial Negativa, en el caso en que  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 1$  de tal forma que  $\alpha(1-p)=\lambda$ , lo cual se verifica a partir de su función generadora de momentos:

$$M_N(t) = \left( \frac{p}{1 - (1-p)e^t} \right)^\alpha = \left( \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\right]e^t} \right)^\alpha = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha}{\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}e^t\right)^\alpha} \quad (2.15)$$

que cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  resulta:

$$M_N(t) = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^t}} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

y esta es la función generadora de momentos de la distribución Poisson.

En otras palabras, cuando el número esperado de siniestros que siguen una distribución binomial negativa es alto y al mismo tiempo su varianza es muy similar a este número esperado<sup>6</sup>, podremos modelar con precisión la ocurrencia de estos siniestros mediante la distribución Poisson.

<sup>6</sup> Obsérvense la media y la varianza en el cuadro resumen, al final de la sección.

Por esta razón, una regla para determinar la distribución del número de siniestros, observando datos históricos, consiste en revisar la relación entre la media y la varianzas muestrales: si la media y la varianzas son "razonablemente" iguales, se podrá ajustar una Poisson y si la varianzas es mayor, una Binomial Negativa. Pero en el caso límite, tanto la Binomial como la Binomial Negativa, podrán ser ajustadas mediante la Poisson.

## 2.7 Resumen de las principales distribuciones para el número de siniestros:

Nombre	$\Pr[N=n]$	Parámetros	Media	Varianza	Generadora de Momentos	Forma de identificarla
Poisson	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$	$\lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$E[N]=V[N]$
Binomial	$\binom{m}{n} q^n p^{m-n}$	$q \in [0,1]$ $p = 1 - q$ $m \in \mathbb{N}$	$mq$	$mpq$	$(p + qe^t)^m$	$E[N] > V[N]$
Binomial Negativa	$\binom{\alpha + n - 1}{n} p^\alpha q^n$	$\alpha > 0$ $p \in (0,1]$ $q = 1 - p$	$\frac{\alpha q}{p}$	$\frac{\alpha q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^\alpha$	$E[N] < V[N]$

## 3.1 Observaciones sobre la distribución de los montos de las reclamaciones

### a) Sobre las distribuciones aplicables

Como se ha expuesto en la sección anterior, el número de siniestros o reclamaciones en un periodo concreto (por ejemplo un año), puede ser modelado con una de las tres distribuciones arriba descritas sin pérdida de generalidad.

Sin embargo, el segundo elemento del Modelo Colectivo, el monto de las reclamaciones individuales, no es caracterizable mediante un número reducido de distribuciones. Por esta razón no es posible exponer en detalle todos los modelos aplicables, aunque una discusión sobre las distribuciones más utilizadas en la práctica actuarial se encuentra en Beard et al (1984).

Un punto definitivamente relevante sobre la distribución de montos, es su comportamiento ante la operación de convolución, ya que el cálculo de la distribución de siniestros agregados:

$\infty$  n

$$F_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} F_X^{*n}(s) \quad 2.17)$$

requiere de esta operación en forma intensiva. Por esta razón es conveniente utilizar distribuciones continuas fáciles de convolucionar (exponencial, gamma, normal, ...) o distribuciones discretas para realizar el cálculo numéricamente. De cualquier modo, la obtención de probabilidades mediante (2.17) es una labor muy costosa (tanto analítica como computacionalmente) y resulta indispensable contar con métodos de aproximación eficaces.

b) Siniestros ocurridos y no reportados. Siniestros ocurridos y no completamente reportados o indemnizados

Sea

$$I_t = S(t+1) - S(t) \quad (2.18)$$

el monto de los siniestros pagados durante el intervalo  $(t, t+1]$  y sea  $\hat{I}_t(v)$  el estimado de (2.18) realizado al tiempo  $v$ .

El efecto tanto de los siniestros ocurridos en periodos anteriores y que no han sido indemnizados es de suma importancia: solamente podemos obtener una estimación de la solvencia del asegurador y dichos estimados dependerán del valor de  $\hat{I}_t(s)$ .

De esta forma, los siniestros agregados que realmente afectan la solvencia en el intervalo  $(t, t+1]$  toman la forma:

$$S_t = \hat{I}_t(t+1) + \sum_{j=1}^{\infty} [\hat{I}_{t-j}(t+1) - \hat{I}_t(t)] \quad (2.19)$$

= siniestros estimados que ocurrieron el año anterior + cualquier incremento en los costos estimados por siniestros que ocurrieron en los años anteriores.

O también

$$S_t = I_t + [\hat{I}_t(t+1) - I_t] + \sum_{j=1}^{\infty} [\hat{I}_{t-j}(t+1) - \hat{I}_{t-j}(t)] \quad (2.20)$$

En resumen, el impacto de las reclamaciones sobre el resultado financiero de una asegurador en un periodo determinado consiste de:

- 1) El monto de las reclamaciones pagadas hasta el momento en ese periodo.
- 2) El error involucrado en la estimación de este monto al final del periodo.
- 3) Cualquier corrección en las estimaciones de siniestros que ocurrieron en periodos anteriores.

De ahí la importancia que reviste la estimación de siniestros ocurridos y no reportados, que recientemente ha sido formalmente implementada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas en nuestro país.

### 3.2 Resumen de las propiedades de las distribuciones compuestas

Distribución compuesta	$F_S(S)$	Generadora de Momentos	Media	Varianza	Sesgo
General	$\sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] F_X^{*n}(s)$	$M_N(\ln M_X(t))$	$E[N]p_1$	$E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 V[N]$	$E[S - (E)]^3$
Poisson	$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} F_X^{*n}(s)$	$e^{\lambda[M_X(t)-1]}$	$\lambda p_1$	$\lambda p_2$	$\lambda p_3$
Binomial	$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^n p^{m-n} F_X^{*n}(s)$	$[p + qM_X(t)]^m$	$Mq p_1$	$mq(qp_1^2 - p_2)$	$mq(2q^2 - p_1^3 - 3qp_1 p_2 + p_3)$
Binomial Negativa	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha-1}{n} q^\alpha p^n F_X^{*n}(s)$	$\left[ \frac{p}{1 - qM_X(t)} \right]$	$\frac{\alpha q p_1}{p}$	$\frac{\alpha q p_2}{p} + \frac{\alpha q^2 p_1^2}{p^2}$	$\frac{\alpha q p_3}{p} + \frac{3\alpha q^2 p_1 p_2}{p^2} + \frac{2\alpha q^3 p_1^3}{p^3}$

En este cuadro y en el resto de la exposición se utiliza la convención rotacional  $p_i = E[X^i]$ , para denotar los momentos alrededor del origen de la distribución de los montos reclamados.

### 3.3 Aproximaciones a la distribución de siniestros agregados

Una de las principales metas de la Teoría de Riesgo es la obtención de aproximaciones útiles, que logren un balance entre precisión y sencillez, sobre todo al combinar portafolios de riesgos diferentes para analizar las obligaciones contingentes de la empresa, operación que generalmente vuelve imprácticos los métodos de cálculo directos o recursivos. Este trabajo está orientado al modelamiento y control de la solvencia, por lo cual conocer las ventajas, desventajas y calidad de las aproximaciones resulta esencial.

En caso de que el número promedio de siniestros sea grande, la distribución de siniestros puede ser aproximada mediante:

$$F_S(s) \approx \Phi\left(\frac{s - E[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}}\right) \quad (2.21)$$

donde  $\Phi$  es la distribución normal estándar.

Por ejemplo, en el caso de la Poisson compuesta, cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$F_S(s) \approx \Phi\left(\frac{s - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}\right) \quad (2.22)$$

Y en el caso Binomial Negativo compuesto, cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ :

$$F_s(s) \approx \Phi \left( \frac{s - \frac{\alpha q}{p} p_1}{\sqrt{\frac{\alpha q}{p} p_2 + \alpha \frac{\alpha q^2}{p^2} p_1^2}} \right) \quad (2.23)$$

Para ilustrar la convergencia de esta fórmula, mostraremos la convergencia de la función generadora de momentos en el caso Poisson compuesto:

Tómese la variable estandarizada  $Z = \frac{s - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}$ . Su función generadora de momentos es:

$$M_Z(t) = E \left\{ \exp \left[ \frac{s - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} t \right] \right\} = E \left\{ \exp \left[ \frac{s}{\sqrt{\lambda p_2}} t - \frac{\lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} t \right] \right\} \quad (2.24)$$

$$M_S \left( \frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}} \right) \exp \left( - \frac{\lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} t \right)$$

Aplicando la fórmula (2.4) esto último es:

$$M_Z(t) = \exp \left\{ \lambda \left[ M_X \left( \frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}} \right) - 1 \right] - \frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}} \right\} \quad (2.25)$$

Pero la definición de la generadora de momentos es

$M_X(t) = 1 + \frac{p_1 t}{1!} + \frac{p_2 t^2}{2!}$  por lo que resulta:

$$M_Z(t) = \exp \left\{ \lambda \left[ 1 + \frac{p_1 t}{1! \sqrt{\lambda p_2}} + \frac{p_2 t^2}{2! \sqrt{\lambda p_2}} + \dots - 1 \right] - \frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}} \right\} \quad (2.26)$$

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{p_3}{p_2^{3/2}} t^3 + \dots \right\}$$

y cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $M_Z(t)$  se aproxima a  $e^{\frac{t^2}{2}}$  que es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar.

Esta aproximación, basada en el teorema central del límite, es clásica en la teoría de probabilidades y también en la Teoría de Riesgo. La distribución normal simplifica enormemente los cálculos y permite tener una amplia perspectiva de fenómenos con muchas variables, traduciéndolos a fórmulas que no se podrían obtener mediante otras técnicas ni con la misma facilidad.

Sin embargo, la precisión de esta aproximación es deficiente, debido a que la distribución de los montos individuales es generalmente sesgada, ocasionando que  $F_s$  tenga una cola pesada a

la derecha. La curva normal subestimar  la probabilidad de que los siniestros agregados sean elevados, aunque para algunos propósitos resulta recomendable, como en el caso de portafolios con riesgos reasegurados, donde el sesgo es menor.

## Aproximación Edgeworth

La aproximación normal es únicamente un caso especial de un resultado asintótico más general, la llamada expansión en series de Edgeworth y que se puede consultar en Feller (1971):

$$F_s(s) \approx \Phi(s) - \frac{1}{6} \gamma \Phi^{(3)}(s) + \frac{1}{24} \gamma_2 \Phi^{(4)}(s) + \frac{1}{72} \gamma^2 \Phi^{(6)}(s) + R \quad (2.27)$$

donde  $\Phi^{(i)}$  es la  $i$ -ésima derivada la función normal,  $\gamma$  el sesgo y  $\gamma_2$  la kurtosis de la distribución de  $S$ . El error de aproximación con los términos presentados es tal que  $R = O(\lambda^{-3/2})$

Sin embargo esta serie es divergente: si incrementamos el número de términos en la serie, el error de esta expansión crece sin cota. Más aún, escogiendo un número de términos apropiado, la aproximación será satisfactoria únicamente alrededor de la media de la distribución original. Como se indicará más adelante, para la determinación de la solvencia se requiere evaluar con precisión la cola de la distribución; y entonces este método también resulta inapropiado. La siguiente aproximación corregir  esta situación.

## Aproximación Normal Power

Este método fue propuesto por primera vez por Kauppi y Ojantakanen (1969) y aún es motivo de desarrollo e investigación en las publicaciones actuariales. Su origen proviene de comparaciones entre la aproximación normal y la distribución Poisson compuesta en casos donde el cálculo directo era posible. Se encontr  un patrón cuyo ajuste fue incluido en la fórmula normal y posteriormente se demostró teóricamente a partir de resultados de Cornish y Fisher en 1937<sup>7</sup>. Dicha demostración consiste en encontrar una transformación de la aproximación normal que se ajuste mejor al sesgo de la distribución compuesta. El resultado fue una transformación polinomial al invertir la serie de Edgeworth<sup>8</sup>:

$$F_s(s) \approx \Phi \left( \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1} + \frac{6[s - E[S]]}{\gamma \sqrt{\text{Var}(S)}} - \frac{3}{\gamma} \right) \quad (2.28)$$

Nótese que ahora la aproximación requiere tres parámetros, la media, desviación estándar y sesgo de la distribución, con lo que se obtiene un mejor ajuste, principalmente cuando el sesgo es pequeño<sup>9</sup>. Nuevamente, en caso de distribuciones sesgadas el problema persiste, por lo cual se propone la siguiente aproximación.

<sup>7</sup> Beard et al (1984) p 108.

<sup>8</sup> Beard et al (1969) p 43-45.

<sup>9</sup> Op.cit. p.45.

## Aproximación Gamma de tres parámetros

Todas las aproximaciones arriba descritas no dan resultados satisfactorios ante distribuciones sesgadas. También se ha mencionado el hecho de que las tres distribuciones compuestas (binomial, binomial negativa y Poisson) tienen un sesgo positivo. Con la finalidad de reconocer este hecho resultaría lógico aproximar directamente a  $S$  mediante otra distribución sesgada. Para ello se propone ajustar la distribución Gamma:

$$F_s(s) \approx \int_0^{s-s_0} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = G(s - s_0 : \alpha, \beta) \quad (2.29)$$

Esta función  $G$  es la distribución gamma original, pero con un parámetro adicional que se ajustará de acuerdo con el grado de asimetría.

Para encontrar los parámetros, se procede a igualar la media, varianza y sesgo de la distribución original con los de la aproximación:

$$\begin{aligned} E[S] &= s_0 + \frac{\alpha}{\beta} \\ \text{Var}[S] &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ E[(S - E[S])^3] &= \frac{2\alpha}{\beta^3} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Despejando se obtiene:

$$\begin{aligned} s_0 &= E[S] - 2 \frac{(\text{Var}[S])^2}{E[(S - E[S])^3]} \\ \alpha &= 4 \frac{(\text{Var}[S])^3}{E[(S - E[S])^3]^2} \\ \beta &= 2 \frac{\text{Var}[S]}{E[(S - E[S])^3]} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por ejemplo, para el caso Poisson compuesto:

$$\begin{aligned} s_0 &= \lambda p_1 - \lambda p_2 \frac{p_2^2}{p_3} \\ \alpha &= 4\lambda \frac{p_2^3}{p_3^2} \\ \beta &= 2 \frac{p_2}{p_3} \end{aligned} \quad (2.32)$$

También esta aproximación abarca el caso normal, pues si  $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty$  y  $s_0 \rightarrow \infty$  de tal forma que

$s_0 + \frac{\alpha}{\beta} = \mu$  y  $\frac{\alpha}{\beta^2} = \sigma^2$ , entonces la función G de (2.29) tiende a la distribución normal con esos parámetros. En Bowers et al (1984), teorema 11.4 se demuestra que la distribución gamma también surge como límite de las distribuciones binomial negativas.

### Aproximación Wilson-Hilferty

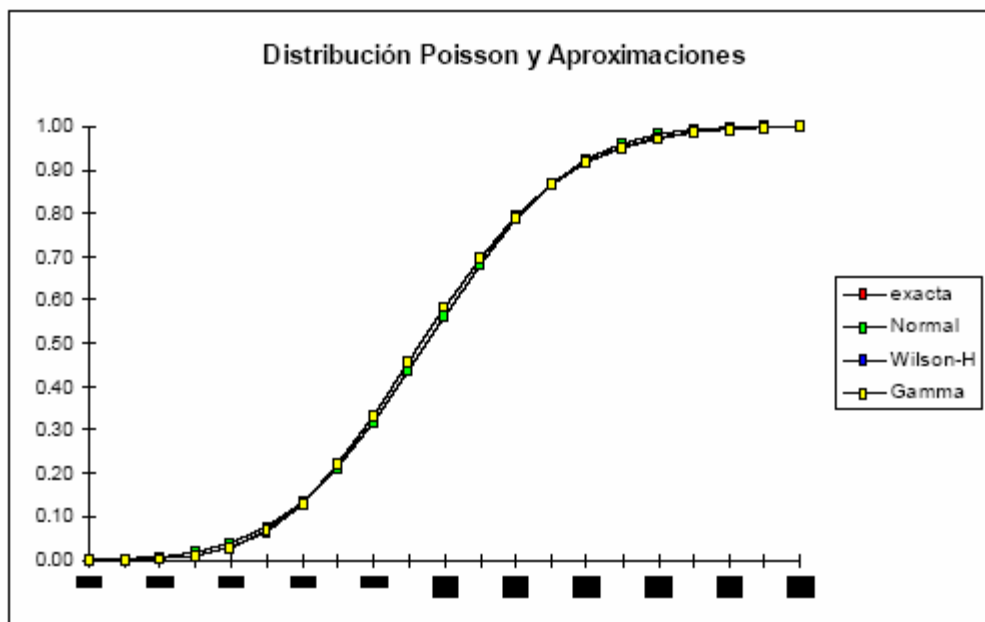
La aproximación Wilson-Hilferty<sup>10</sup> es otro ejemplo de aproximaciones derivadas del caso normal. Su desempeño es notable cuando el sesgo y de la distribución de montos es pequeño (menor a dos). Sin embargo para distribuciones de montos sesgadas no es aplicable. Por ejemplo, para el caso comparativo que a continuación se muestra, la fórmula Wilson-Hilferty resulta muy superior a la mayoría de las aproximaciones.

$$F_s(s)\Phi\left(\frac{\gamma}{6} - \frac{6}{\gamma} + 3\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{2/3}\left(s + \frac{2}{\gamma}\right)^{1/3}\right) \quad (2.32)$$

### Comparación entre las aproximaciones

En la siguiente gráfica se muestra una comparación de las aproximaciones para el caso Poisson con  $\lambda=10$ , es decir para la función Poisson compuesta con distribución de montos colapsada en 1. En este caso la aproximación Normal-Power resulta muy deficiente y no fue incluida para apreciar mejor el resto de las aproximaciones:

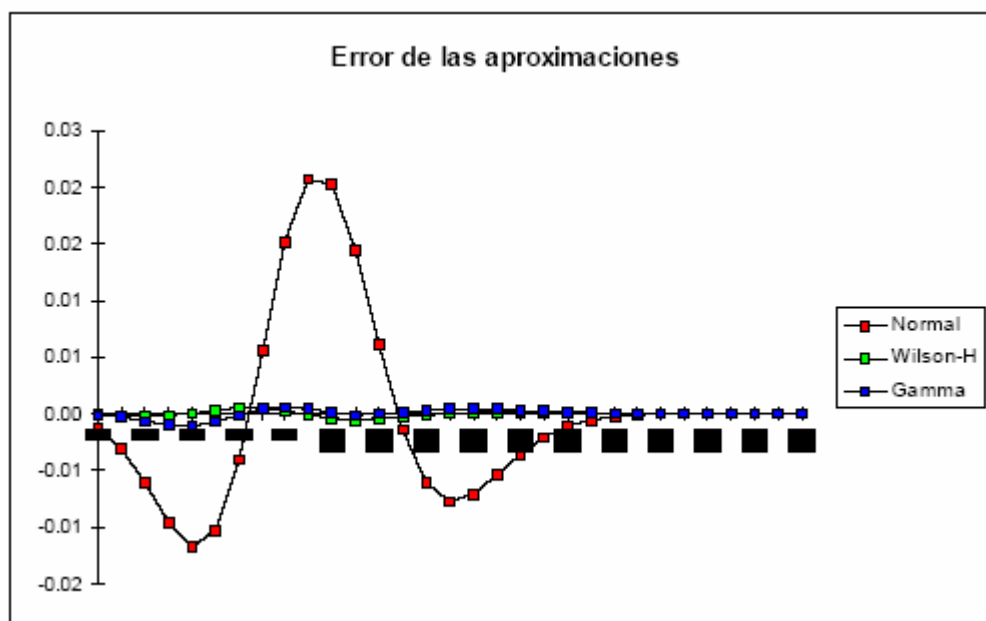
Figura 2.5  
Desempeño de las aproximaciones



<sup>10</sup> Johnson y Kotz (1970), sección 17.5.

Debido a la calidad de las aproximaciones no es posible compararlas sobre la gráfica de distribución. Conviene graficar los errores con respecto al verdadero valor:

Figura 2.6

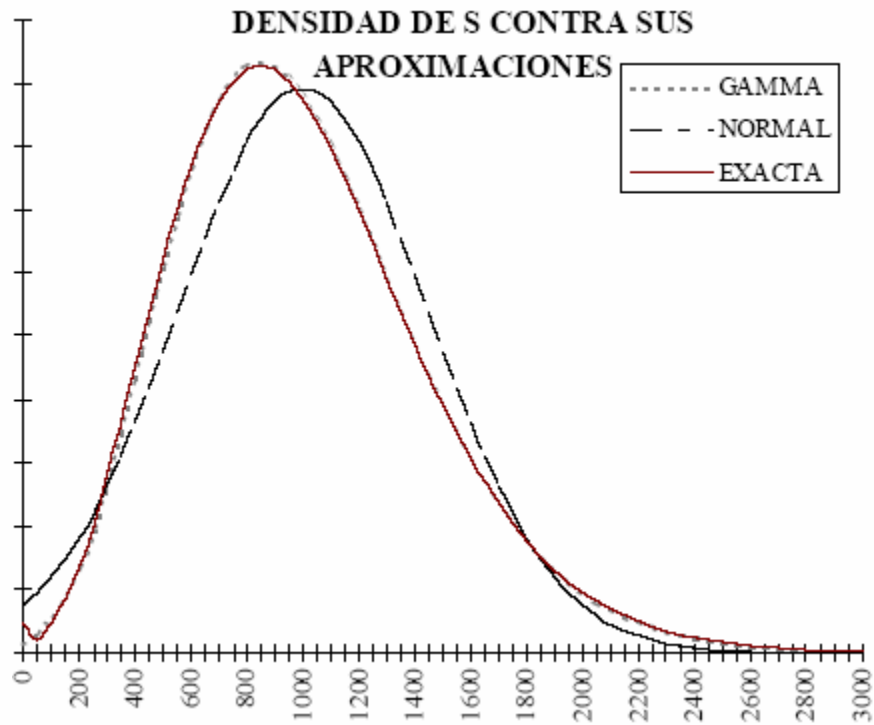


Y se puede apreciar cómo la aproximación Gamma es más eficiente que el resto aún para valores de  $\lambda$  tan pequeños como 10. Nótese el patrón que muestra la aproximación Normal: como ya fue mencionado, este es el hecho que originó la aproximación Normal-Power y que efectivamente logra disminuir el error, solamente que para valores grandes de  $\lambda$ .

Un segundo ejemplo que nuevamente ilustra el desempeño de la aproximación Gamma de tres parámetros, ahora sobre una distribución compuesta, es el siguiente:

Considérese nuevamente la distribución Poisson Compuesta con  $\lambda=10$ , pero ahora el monto de las reclamaciones seguirá una distribución exponencial con media 100. La gráfica ilustra la verdadera distribución de siniestros agregados, calculada mediante convoluciones, contra las aproximaciones Normal y Gamma.

Figura 2.7



Lo cual ilustra perfectamente el comportamiento ante distribuciones sesgadas: La densidad Normal subestima la cola a la derecha de la distribución, en tanto que la aproximación Gamma da un ajuste de excelente precisión en la misma

## Capítulo 3

### Procesos Poisson Compuestos y Modelos para las Reservas

#### 1. Procesos de Poisson Compuestos

El modelo descrito en (2.2) expresa a los siniestros agregados generados por un portafolio de pólizas (del Modelo Individual o del Colectivo) en un periodo determinado. Es decir, la distribución del número de siniestros expresa el total de reclamaciones de un periodo, por ejemplo, un año.

Pero el concepto de solvencia requiere del análisis detallado de las fluctuaciones que ocurren durante todo el periodo de exposición, ya que aunque la empresa de seguros sea considerada solvente al final de cada periodo, esto no garantiza que dicha empresa sea solvente en cada instante de ese periodo.

Con esta finalidad se generalizará el modelo de siniestros agregados

$$S=X_1+X_2+\dots+X_N \quad (3.1)$$

para indicar los siniestros agregados al tiempo  $t > 0$ :

$$S(t)=X_1 +X_2 +\dots+ X_{N(t)} \quad (3.2) .$$

Donde  $N(t)$  denota el número de siniestros *hasta el momento*  $t$  . Ahora  $N(t)$  es un proceso Poisson que mantiene las hipótesis ya mencionadas. El proceso  $S(t)$  es un proceso de Poisson Compuesto, cuya distribución al momento  $t$  es:

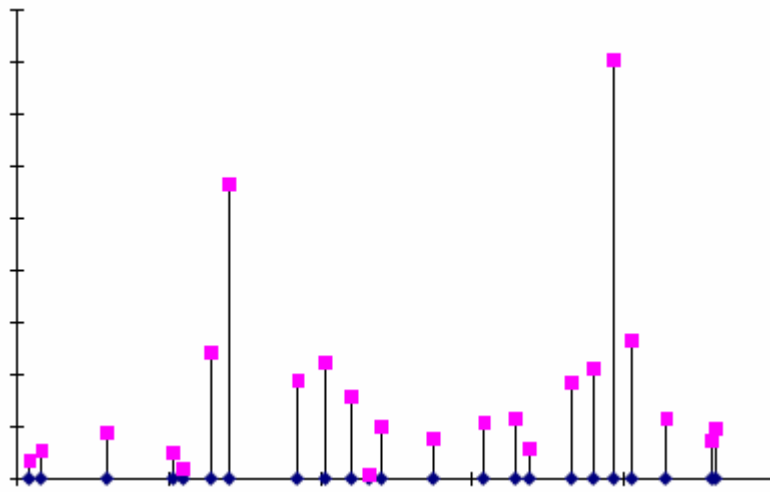
$$PR\{S(t) \leq s\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E[N(t)]t} \frac{(E[N(t)])^n}{n!} F_X^{*n}(s) \quad (3.3)$$

Donde  $E[N(t)]$  es el número esperado de siniestros en el intervalo  $(0,t]$   $E[N(t)] = \lambda t$  ] y se calcula mediante (2.6):

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(u) du \quad (3.4)$$

donde  $\lambda(u)$  es la tasa a la cual ocurren las reclamaciones, tal y como se expuso en la sección 2.2.

Figura 3.1  
Tiempos en que ocurren las reclamaciones y montos reclamados



## 2. Tiempo operacional:

Nuevamente el modelo Poisson presenta gran flexibilidad para adecuarse a los datos reales. En caso de que la intensidad varíe en forma determinística se recurre a la fórmula (2.6) para modificar la escala de tiempo a lo que se denomina "tiempo operacional":

$$t = \frac{1}{\lambda} \int_0^u \lambda(v) dv, \text{ con } \lambda > 0 \quad (3.5)$$

Esta última es una función que relaciona el tiempo original  $u$  en el que ocurren los siniestros (a una tasa variable) y el tiempo operacional  $t$  en el cual los eventos ocurren a tasa constante.

Las siguientes gráficas ilustran este cambio de escala para la función  $\lambda(u) = \frac{u^2}{12}$ , para todo un año. Por ejemplo, el promedio de siniestros durante el primer mes es

$$\int_0^1 \frac{v^2}{12} dv = 0.027$$

en tanto que para el último mes del año es

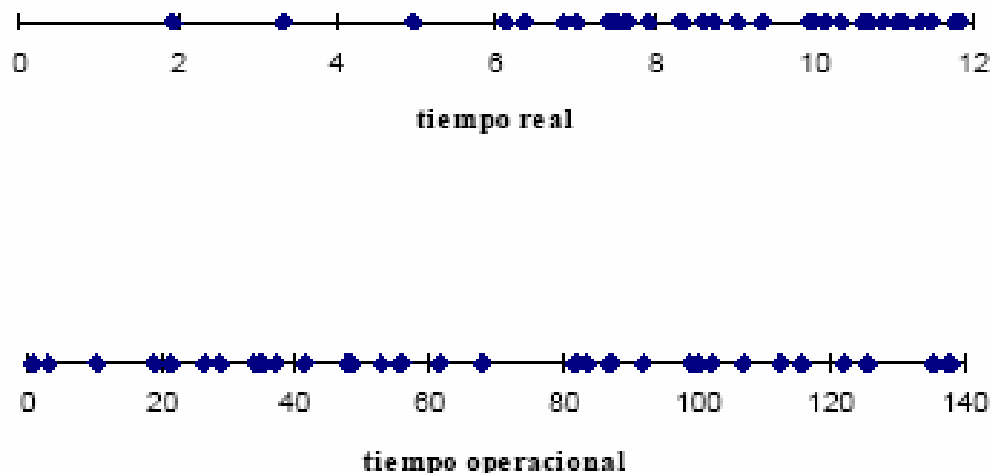
$$\int_{11}^{12} \frac{v^2}{12} dv = 11.027 \text{ siniestros.}$$

En la primera figura aparece una simulación de las reclamaciones en tiempo real, en la segunda aparecen las mismas reclamaciones, pero en la escala operacional, lo que ocasiona que las

reclamaciones aparezcan a una tasa más "regular"<sup>11</sup>. La relación entre los dos tiempos es, en términos de (2.7):

$$\text{tiempo operacional} = t = \frac{1}{\lambda} \int_0^u \frac{v^2}{12} dv = \frac{1}{\lambda} \frac{u^3}{36} \text{ se escogió } \lambda=3 \text{ únicamente por facilidad al graficar.}$$

Figura 3.2  
Comparación entre el tiempo real y el tiempo operacional



Con esta transformación, la distribución de siniestros agregados será:

$$Pr\{S(t) \leq s\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_X^{*n}(s) \quad (3.6)$$

El tiempo operacional es una herramienta muy poderosa en la estimación de la distribución de siniestros agregados, pues reemplaza el conocimiento detallado de la constitución del portafolio de pólizas, con una estimación del número esperado de reclamaciones durante el periodo futuro en consideración.

Los momentos de esta distribución se pueden encontrar en forma similar a los descritos en el capítulo anterior (sección 3.3), por ejemplo:

$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda t p_1 \quad (3.7)$$

### 3. Modelo para el flujo de primas cobradas al momento $t$

Las primas por riesgo que cobra la empresa de seguros por un conjunto de pólizas, siempre puede representarse de la forma:

<sup>11</sup> No olvidar que los tiempos de las ocurrencias son aleatorios.

$$c = E[S](1 + \theta), \text{ con } \theta > 0 \quad (3.8)$$

Donde  $E[S]$  es el valor esperado del monto total de siniestros que habrá pagado la compañía al final de un periodo. A este valor se le conoce como prima actuarial.  $\theta$  es el porcentaje por arriba de la prima actuarial que el asegurador está cobrando.

Para el proceso de siniestros al momento  $t$ , se tiene la expresión equivalente

$$c(t) = E[S(t)](1 + \theta) \quad (3.9)$$

donde ahora  $c(t)$  representa las primas cobradas al momento  $t$ . En el caso de que los siniestros agregados sean modelados como un proceso Poisson compuesto con media (3.7), la expresión anterior toma la forma:

$$ct = \lambda t p_1 (1 + \theta) \quad (3.10)$$

Eliminando las unidades de tiempo, obtenemos una tasa constante a la cual la aseguradora recibe el flujo de efectivo correspondiente a las primas de riesgo:

$$c = \lambda p_1 (1 + \theta) \quad (3.11)$$

En algunas ocasiones se critica al modelo clásico de Lundberg el utilizar esta tasa constante, por considerarse que sobresimplifica los hechos. Sin embargo este argumento no es válido, ya que como se ha señalado en la sección anterior, los cálculos se realizan en la escala operacional, donde los eventos ocurren precisamente a tasa constante.

#### 4. Modelo Clásico de la Reserva

El modelo de Lundberg utiliza los elementos arriba descritos al representar el comportamiento de las reservas para el pago de siniestros. Resulta un modelo conveniente para el análisis de suficiencia en primas durante el diseño de productos. Algunos parámetros derivados de este modelo, por ejemplo la probabilidad de ruina, son motivo de estudio en la literatura desde principios de siglo y resultarán muy útiles para generalizar el concepto hacia la solvencia.

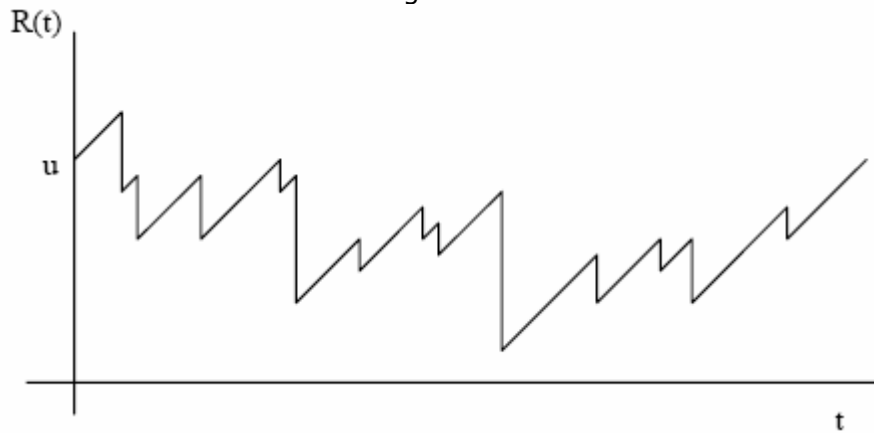
El proceso que representa a la reserva al momento  $t$  es el siguiente:

$$R(t) = u + ct - S(t) \quad (3.12)$$

donde  $u$  representa el valor inicial de la reserva,  $ct$  el monto de primas cobradas y  $S(t)$  los siniestros agregados hasta ese momento.

Una realización del proceso  $R(t)$  puede graficarse así:

Figura 3.3



La reserva parte del nivel inicial  $u$ , se incrementa con el pago de primas a tasa constante y decrece por el pago de siniestros.

## 5. Probabilidad de Ruina

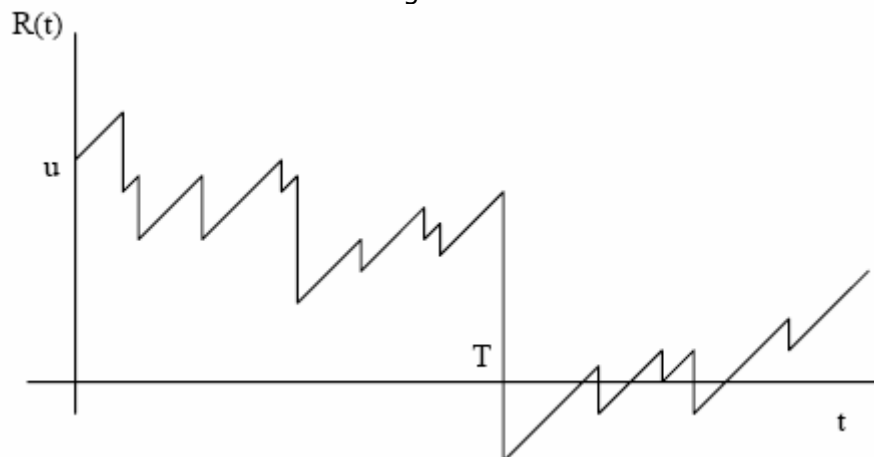
Una medida de estabilidad de la reserva fue propuesta por el mismo Lundberg, la denominada probabilidad de ruina es simplemente la probabilidad de que la reserva se ubique en algún momento por debajo de cero. En otras palabras, es la factibilidad de que la reserva sea insuficiente para hacer frente a los siniestros.

Formalmente, defínase la siguiente variable aleatoria:

$$T = \inf\{t \ni t \geq 0, R(t) < 0\} \quad (3.13)$$

como el tiempo en que ocurre la ruina. En realidad es el primer instante en el cual la reserva toma un valor negativo. En caso de que la ruina nunca ocurra, es decir,  $R(t) > 0$  para toda  $t$ , se define  $T = \infty$ .

Figura 3.4



La probabilidad de ruina al momento  $t$ , denotada tradicionalmente como  $\psi(u, t)$ , se define con base en esta variable:

$$\psi(u, t) = Pr \{T \leq t\} \quad (3.14)$$

En otras palabras,  $\psi(u, t)$ , mide la factibilidad de que la reserva tome un valor negativo en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ . Obviamente a mayor nivel de reserva inicial  $u$  menor será la probabilidad de ruina y a mayor horizonte de tiempo  $t$ , mayor será la factibilidad de que el proceso se encuentre en ruina.

A la probabilidad de que la reserva tome en algún momento un valor negativo se le denomina *probabilidad de ruina eventual* y se denota por  $\Psi(u)$ . Esta se obtiene como el límite de  $\psi(u, t)$ ,:

$$\Psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) \quad (3.15)$$

Y como cabe esperar, la probabilidad de ruina eventual es una cota superior para la probabilidad de ruina al tiempo  $t$ :

$$\psi(u, t) \geq \psi(u) \quad (3.16)$$

Seal (1978) mediante resultados numéricos sugiere que  $\psi(u, t)$ , converge a  $\psi(u)$  rápidamente, conforme  $t$  se incrementa. Más aún, podemos conocer aproximadamente el orden de convergencia mediante la fórmula de Cramér<sup>12</sup>:

$$\psi(u) - \psi(u, t) \approx ut^{-\frac{3}{2}} \exp(-\gamma_0 u - \gamma_1 t) \quad (3.17)$$

para  $u, t \rightarrow \infty$  y  $u = o(\sqrt{t})$

donde  $\gamma_0, \gamma_1$  son constantes definidas sobre la distribución del monto de las reclamaciones.

La rapidez de convergencia es muy importante: Un asegurador normalmente espera varios cientos o miles de reclamaciones en un año, por tanto un horizonte de unos cuantos meses será prácticamente indistinguible del tiempo infinito.

Finalmente introducimos por notación las probabilidades de no-ruina:

$$\phi(u, t) = 1 - \psi(u, t) \quad (3.18)$$

$$\phi(u) = 1 - \Psi(u) \quad (3.19)$$

El cálculo de estas probabilidades es el tema central de la Teoría de Riesgo, al grado que se utiliza el término "Teoría de Ruina" para denotar al conjunto de técnicas probabilísticas utilizadas. La literatura sobre este tema es particularmente abundante y puede encontrarse una exposición muy completa en Seal(1969) y Gerber(1979). La matemática empleada en este sentido excede los fines de este trabajo, por lo que se remite al lector a los textos antes citados

<sup>12</sup> Taylor y Buchanan (1989) p 69.

o a la tesis del mismo autor que precede a esta exposición<sup>13</sup>.

Los resultados más notables en la Teoría de Ruina se muestran a continuación:

### 5.1 Probabilidad de Ruina al momento t

En primer lugar, una expresión para la probabilidad  $F(u,t)$  es derivada por Arfwedson (1954)<sup>14</sup> como la solución de la ecuación diferencial:

$$c \frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial u} = \frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial t} + \Phi(u,t) - \int_0^u (u-y,t) dF_X(y) \quad (3.20)$$

Como las reclamaciones son estrictamente positivas,  $F_X(0)=0$  y podemos obtener la transformada de Laplace-Stieltjes:

$$M(r) = \int_0^{\infty} e^{-ry} dF_X(y) \quad (3.21)$$

y la doble transformada de Laplace:

$$v(r,s) = \int_0^{\infty} e^{rw} dw \int_0^{\infty} e^{st} \Phi(w,t) dt \quad (3.22)$$

La solución para  $v(r,s)$  es:

$$v(r,s) = \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho(s)} \right] [s + 1 - cr - \rho(r)]^{-1} \quad (3.23)$$

donde  $r=\rho(s)$  es la única raíz real positiva de la ecuación:

$$s + 1 - cr - M(r) = 0, s > 0 \quad (3.24)$$

Así la obtención de las probabilidades de no ruina requieren la inversión de la doble transformada de Laplace (3.22).

Seal (1969) presenta una fórmula alternativa para  $\Psi(u,t)$ . La probabilidad de no ruina en el caso de reserva inicial cero es:

$$\Phi(0,t) = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F_S(x,t) dx \quad (3.25)$$

y para valores positivos de la reserva inicial:

<sup>13</sup> Hernández (1996).

<sup>14</sup> Taylor y Buchanan (1989).

$$\phi(u, t) = F_S(u + ct, t) - c \int_0^t \phi(0, \tau) f_S(u + c(t - \tau), t - \tau) d\tau \quad (3.26)$$

## 5.2 Probabilidad de ruina eventual

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , (3.19) toma la forma:

$$c\phi'(u) = \phi(u) - \int_0^u U(u - y) dF_X(y) \quad (3.27)$$

que es equivalente a

$$\phi(u) = \phi(0) + \int_0^u \phi(x - y) \frac{[1 - F_X(y)]}{c} dy \quad (3.28)$$

Esta ecuación puede resolverse de la misma forma que en (3.20) con la transformada de Laplace

$$v(r) = \int_0^{\infty} e^{-ru} \phi(u) du \quad (3.29)$$

obteniendo la solución:

$$v(r) = (c - 1)[cr - 1 + M(r)]^{-1} \quad (3.30)$$

urc 1 -+ Mr

## 5.3 Aproximaciones

Las dificultades en la evaluación de las fórmulas de ruina de las dos secciones anteriores son tales que gran parte de la Teoría de Ruina se dedica específicamente a obtener buenas aproximaciones. De ellas, la más sencilla y conocida es:

$$\psi(u) \approx e^{-Ru}, \quad (3.31)$$

donde R es llamado el Coeficiente de Ajuste y es la única raíz positiva de la ecuación<sup>15</sup>:

$$1 + (1 + \theta)P_1R - m(r) = 0 \quad (3.32)$$

Aunque de hecho,

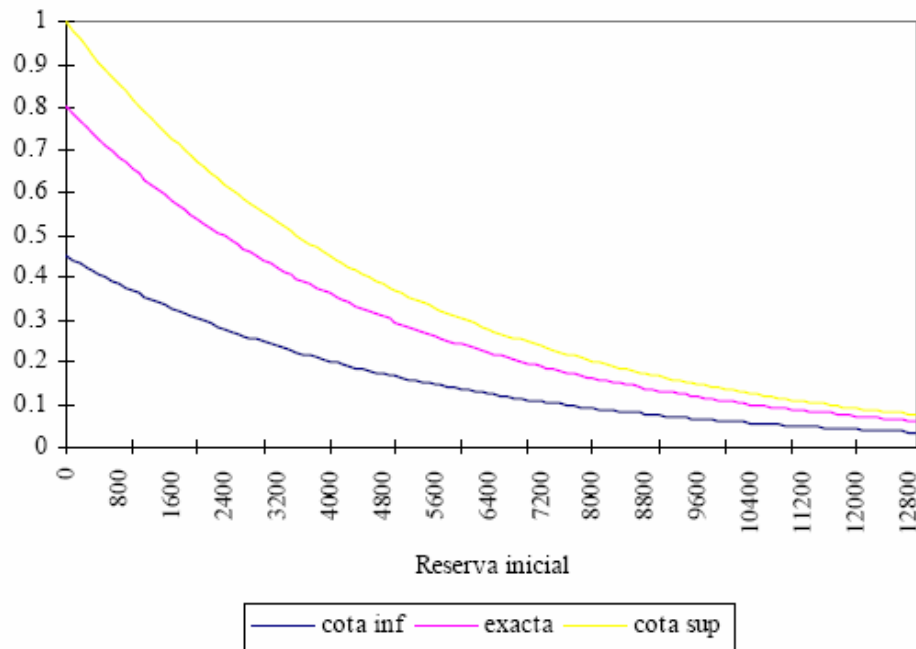
<sup>15</sup> Obsérvese que es el denominador de (3.30) cuando  $c=(1+\theta)\lambda p_1$ .

$$e^{-R(u+m)} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (3.33)$$

donde  $m$  es el límite máximo de indemnización (suma asegurada máxima) o bien el límite de retención. Al lado derecho de (3.33) se le conoce como la desigualdad de Lundberg<sup>16</sup>.

Figura 3.5

Comparación entre la probabilidad de ruina con distribución de montos exponencial con media 1000, límite de indemnización 4000 y recargo de seguridad 25%.



La fórmula (3.33) puede mejorarse, obteniéndose la aproximación Cramér-Lundberg<sup>17</sup>:

$$\psi(u) \approx \frac{\theta p_1}{M'_X(R) - (1 + \theta)p_1} e^{-Ru} \quad (3.34)$$

Que resulta exacta para el caso en que la distribución de montos es exponencial. Utilizando una distribución gamma para aproximar la distribución del monto de reclamaciones se obtiene la aproximación Beekman-Bowers de 1969:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1 + \theta} [1 + G(u)] \quad (3.35)$$

donde  $G(w) = \int_0^w \frac{b^{-a} y^{a-1} e^{-y/b}}{\Gamma(a)} dy$  es la distribución gamma con parámetros:

<sup>16</sup> 16 Tayloy y Buchanan(1989).

<sup>17</sup> 17 Ver Ramsay (1992).

$$a = \frac{1}{b} \frac{p_2}{2\theta} \left( 1 + \frac{\theta}{p_1} \right)$$

$$b = \frac{2}{3} \frac{p_3}{p_2} + \frac{p_2}{2\theta} \left( 1 + \frac{\theta}{p_1} \right)$$

Ramsay (1992) indica que (3.35) parece dar buenas aproximaciones únicamente en el caso de montos exponenciales y que no es tan precisa como la aproximación Cramér-Lundberg.

La aproximación de De Vylder consiste en aproximar todo el proceso de la reserva por riesgo  $\{R(t)\}$  mediante un proceso más simple  $\{\bar{R}(t)\}$  tal que

$$\bar{R}(t) = u + (1 + \bar{\theta}) \bar{\lambda} \bar{p}_1 - \bar{S}(t) \quad (3.36)$$

Donde  $\bar{\lambda}$  es el nuevo parámetro Poisson,  $\bar{S}(t)$  es el proceso de siniestros agregados generado por montos de reclamaciones exponenciales i.i.d. con media  $\bar{p}_1$  y el nuevo recargo de seguridad es  $\bar{\theta}$ .

Estos nuevos parámetros se obtienen igualando los tres primeros momentos:

$$E[R^k(t)] = E[\bar{R}_k(t)], \quad k = 1, 2, 3$$

Obteniéndose:

$$\bar{p}_1 = \frac{p_3}{3p_2}$$

$$\bar{\theta} = \frac{2p_1 p_3}{3p_2^2} \theta$$

$$\bar{\lambda} = \frac{9p_2^3}{2p_3^2} \lambda$$

Y la aproximación resultante es, como cabe esperar, la probabilidad de ruina en el caso exponencial:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1 + \bar{\theta}} \exp\left(-\frac{u\bar{\theta}}{\bar{p}_1(1 + \bar{\theta})}\right) \quad (3.37)$$

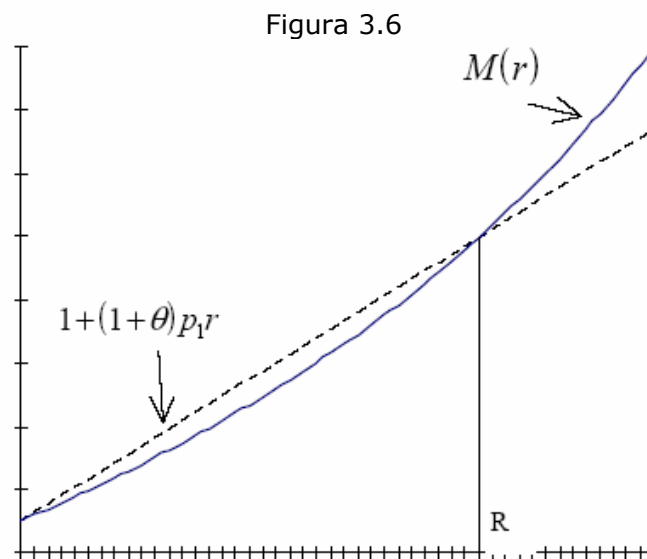
Ninguna de estas fórmulas es fácil de evaluar, incluso la aproximación (3.31) requiere resolver la ecuación (3.32).

## 6. Observaciones sobre el Coeficiente de Ajuste y la Probabilidad de Ruina:

Ya se ha definido al coeficiente de ajuste como la única raíz positiva de la ecuación (3.32):

$$1+(1+\theta)p_1r=Mr \quad (3.38)$$

El lado izquierdo es una recta, en tanto que el derecho es la curva exponencial de la función generadora de momentos del monto de las reclamaciones (definida en un intervalo alrededor del origen). Su gráfica es la siguiente:



Para  $r=0$ , ambos lados de (3.38) son 1. En ese punto el lado derecho tiene pendiente  $M'(0)=p_1$  mientras que en el izquierdo la pendiente es  $(1+\theta)p_1$ , que es estrictamente mayor que  $p_1$ . Como  $M(r)$  es creciente se sigue que la ecuación tiene una única raíz.

Así, un incremento en  $\theta$  implica que la pendiente de la recta se incremente y el coeficiente de ajuste también se incrementa. Una distribución más sesgada ocasiona que  $M(r)$  tenga un crecimiento acelerado y reduce el valor de  $R$ .

Con estas observaciones podemos hacer las siguientes afirmaciones:

- a) La probabilidad de ruina eventual no depende de la tasa del proceso. Esto se deduce de (3.38) además de lo ya expuesto sobre el tiempo operacional.
- b) Una distribución de siniestros de cola pesada implica una probabilidad de ruina mayor, pues reduce el valor del coeficiente de ajuste. La intuición confirma este hecho, pues siniestros "catastróficos" deben ocasionar una probabilidad de ruina mayor.
- c) Un incremento en  $\theta$  causa un incremento en  $R$  y la probabilidad de ruina decrece exponencialmente. En otras palabras, si las primas por riesgo se incrementan es menos factible caer en insuficiencia de primas.

d) Si  $\theta=0$  entonces  $R=0$  y ocurre el evento de ruina con probabilidad 1.

Esta afirmación no debe menospreciarse. Indica que si únicamente se cobra la prima actuarial<sup>18</sup> por un riesgo determinado, entonces con toda certeza e independientemente de la reserva inicial asignada, el fondo será insuficiente en el largo plazo. En seguros de vida, por ejemplo, significa que las primas únicas (que son valores esperados de los pagos futuros) no sólo no proporcionan al actuario toda la información sobre la fluctuación, sino que además son insuficientes, en el largo plazo, para lograr la estabilidad del sistema de seguro. Aunque el hecho de utilizar hipótesis actuariales conservadoras (tablas recargadas y tasas técnicas) permiten cobrar más que el valor esperado de los siniestros, el no reconocer las verdaderas características de los riesgos asegurados impide la toma de decisiones efectiva.

## 7. La fórmula de Gerber y la Teoría de Utilidad

De las expresiones (3.31), (3.33) y (3.34) se deduce que la probabilidad de ruina está en función del coeficiente de ajuste. De hecho, Gerber(1979) encuentra la relación explícita entre estos valores aplicando la hipótesis de un juego justo: la utilidad esperada de la reserva del asegurador después de ocurrir el proceso de reclamaciones en un periodo unitario debe ser igual a la reserva inicial de dicho periodo.

Si  $U(\bullet)$  denota la función de utilidad del asegurador, estrictamente creciente y •diferenciable, sin pérdida de generalidad<sup>19</sup> podemos afirmar que  $U(0)=0$  y  $U'(0)=1$ . Si además se define

$$v(w) = \frac{U(\infty) - U(w)}{U(\infty) - U(0)} \quad (3.39)$$

Entonces Gerber demuestra que:

$$\psi(u) = \frac{v(u)}{E[v(R(T)) | T < \infty]} \quad (3.40)$$

lo cual indica que la convergencia de  $\psi(u)$  a cero con  $u$  creciente puede variar considerablemente con respecto a (3.31) . En particular la convergencia no será exponencial si la función de utilidad no es a su vez exponencial. Aún en el caso de utilidad exponencial:

$$U(w) = \frac{1 - e^{-aw}}{a} \quad (3.41)$$

al aplicar (3.40) resulta en

$$\psi(u) \approx e^{-au} \quad (3.42)$$

lo cual indica que la convergencia no depende de la distribución de montos sino en el coeficiente de aversión al riesgo  $a$ <sup>20</sup>. En otras palabras, a mayor aversión al riesgo por parte del

<sup>18</sup> Es decir, el valor esperado de los siniestros.

<sup>19</sup> Es decir, el valor esperado de los siniestros.

<sup>20</sup> Ver Borch (1974).

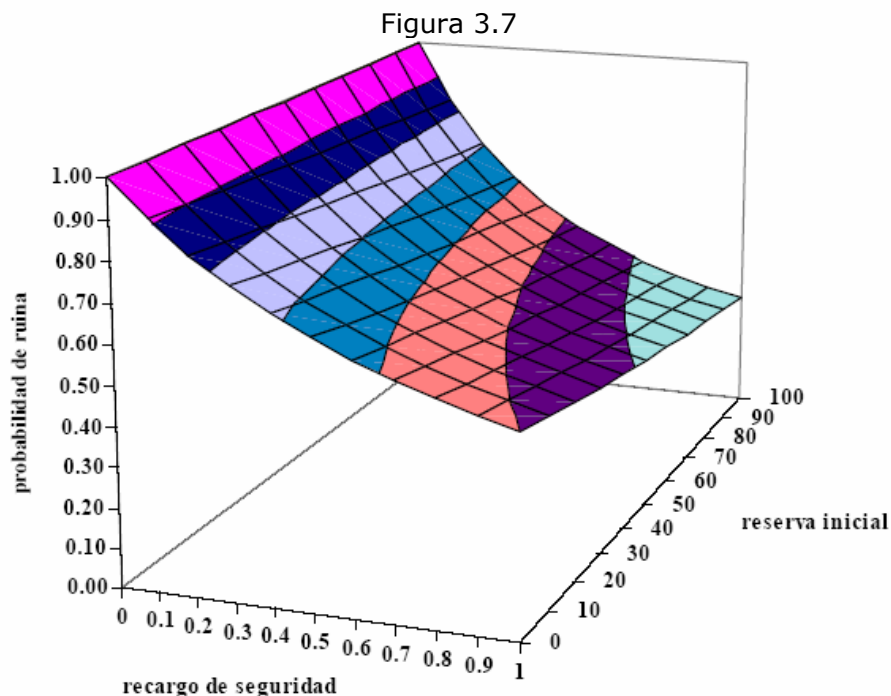
asegurador, mejor convergencia a cero con reserva inicial creciente, o bien, los suscriptores de riesgos mayores requieren mayor capitalización.

Esta última observación, aunque coincide con el sentido común, es mucho más difícil de implementar por parte de las autoridades reguladoras, pues implica que el margen de solvencia requerido para un asegurador en particular debería depender de la forma en que modifica sus tarifas ante fluctuaciones en la reserva. Pero el asegurador modifica sus tarifas de acuerdo a muchos otros factores, haciendo impráctico este criterio. La verdadera aportación de Gerber en este sentido radica en observar que la aproximación clásica (3.31) puede ser absolutamente incorrecta para formular una política o reglamentación sobre el margen de solvencia.

Una aplicación de (3.40) es la obtención de probabilidades de ruina para el caso de montos de las reclamaciones exponenciales. Todas las fórmulas presentadas anteriormente dependen de la forma funcional de la distribución de los montos de las reclamaciones. Más aún, solamente en ciertos casos es posible encontrar formas explícitas para la probabilidad de ruina. Este es el caso de la distribución de montos exponencial<sup>21</sup>, donde:

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)} \exp\left[\frac{-\theta}{(1+\theta)} \frac{u}{p_1}\right] \quad (3.43)$$

La siguiente figura ilustra los valores de la probabilidad de ruina para una distribución de montos exponencial con media 100.



<sup>21</sup> Véase por ejemplo Bowers op cit capítulo 12.

## 8. Otros métodos para la obtención de probabilidades de ruina.

Como el lector notará, la técnica general para obtener probabilidades de ruina depende de la solución de una ecuación integro-diferencial como (3.20) o (3.27) y ésta depende de la existencia de la transformada de Laplace-Stieltjes. Embrechts y Veraverbeke (1982) presentan un desarrollo alternativo para esta situación, la cual ocurre en el caso de riesgos catastróficos, pues la distribución del monto de las reclamaciones tiene un sesgo tal que impide la convergencia de la integral (3.21). En cualquiera de estas circunstancias se requiere el completo conocimiento de la distribución de montos.

Un enfoque relativamente reciente y que ofrece mayores posibilidades es el presentado en Goovaerts et al.(1990), donde se establecen cotas para esta probabilidad mediante el Ordenamiento de Riesgos.

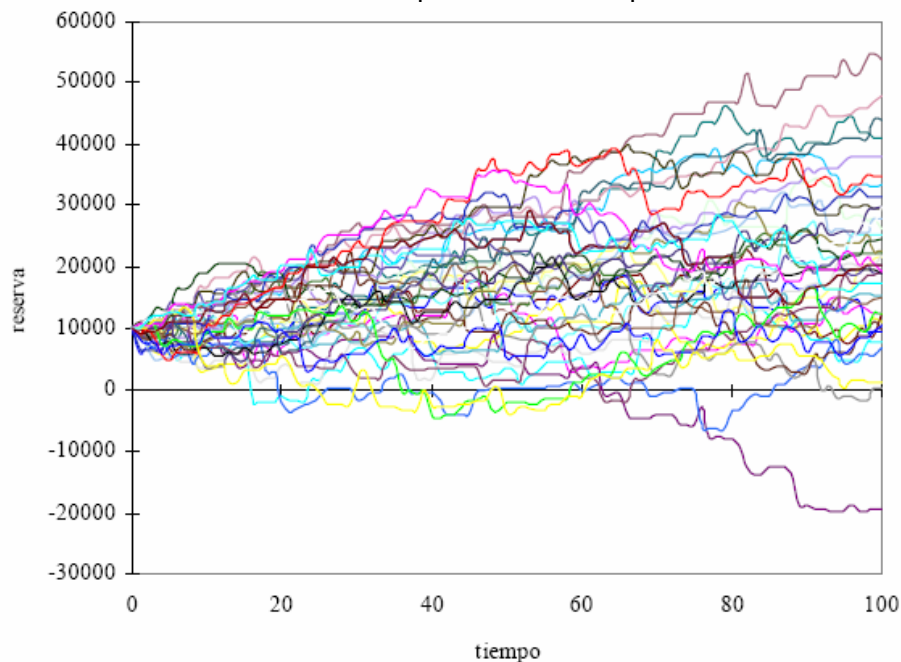
Otro tipo de aproximaciones surge del uso de técnicas no paramétricas como el remuestreo para aproximar la probabilidad de ruina eventual. El lector interesado puede consultar Frees(1986).

Una técnica prometedora pero sorprendentemente poco utilizada es la de Monte Carlo. Sobre este tema una exposición muy completa se encuentra en Beard et al. (1984) e importantes recomendaciones para su aplicación se exponen en Dufresne y Gerber (1989).

Baste como ilustración de esta técnica lo siguiente:

Tómese un proceso Poisson Compuesto con intensidad unitaria (en tiempo operacional) y distribución de montos exponencial con media 1000 . Si la reserva inicial es de 10,000 y el recargo de seguridad es 10% entonces por (3.43) se tiene que  $\psi(u)=0.37$ .

Figura 3.8  
Simulación directa de la reserva para estimar la probabilidad de ruina



Después de 1000 simulaciones directas del proceso, se obtiene la estimación  $\hat{\psi}(u) = 0.34$  y el error estándar de esta aproximación es exactamente <sup>22</sup> de

$$\sqrt{\frac{\psi(u)[1-\psi(u)]}{1000}} = \sqrt{\frac{0.37(1-0.37)}{1000}} = 0.0152$$

pero como desconocemos precisamente el verdadero valor de  $\psi(u)$ , se puede aproximar como

$$\sqrt{\frac{\hat{\psi}(u)[1-\hat{\psi}(u)]}{1000}} = \sqrt{\frac{0.34(1-0.34)}{1000}} = 0.0149.$$

El inconveniente de esta técnica es el tamaño de muestra requerido para lograr un error estándar menor. Por ejemplo, para obtener un error estándar "satisfactorio" de 0.001, se requerirán 233,100 simulaciones directas del proceso, que puede representar una carga computacional importante, aunque la tecnología actual ha logrado enormes avances y ya permite considerar a esta técnica fuera del medio estrictamente teórico. Adicional a esto, es importante señalar que el proceso fue simulado de una forma muy ineficiente denominada "simulación directa". Al conjunto de metodologías eficientes para mejorar la estimación (reducción de error estándar) se les denomina técnicas de Monte Carlo y el lector interesado puede consultar Hammerseley y Handscomb(1979) para una exposición muy completa sobre el tema.

La enorme ventaja de este método consiste en que directamente pueden relajarse algunos de los supuestos que se han establecido en este capítulo, por ejemplo la dependencia de ocurrencias, el ajuste dinámico de primas y del recargo de seguridad, cambios de la distribución a través del tiempo, etc.

---

<sup>22</sup> Esto se sigue de que las simulaciones generan una muestra aleatoria de variables Bernoulli con parámetro  $\psi(u)$  y el estimador es precisamente la media muestral.

## Capítulo 4

### De Ruina y Solvencia

En este capítulo se realizarán los ajustes necesarios para utilizar la probabilidad de ruina a corto plazo como una herramienta para medir la probabilidad de insolvencia (en el corto plazo) y establecer márgenes de solvencia aplicables en la supervisión periódica de las empresas de seguros.

#### 1. Efecto de la fluctuación aleatoria de los parámetros básicos del modelo

##### 1.1 Fluctuación en el recargo de seguridad

Como se pudo apreciar en el capítulo anterior, el evento de ruina/insolvencia depende en gran medida de un recargo de seguridad  $\theta$  "apropiado".

De acuerdo con lo comentado en la sección 3 del capítulo 3, la prima de riesgo es calculada simplemente tomando el valor esperado de la distribución de siniestros agregados y añadiendo el recargo de seguridad. Pero estos valores son desconocidos en la práctica, por lo expuesto en el capítulo 2, por lo cual es necesario considerar en las siguientes secciones la contribución de cada elemento a dicha incertidumbre. Esto se logra considerando a  $\theta$  como una variable aleatoria en lugar de una constante prefijada mediante el criterio de ruina. Y aunque solamente se dispone de estimados para  $\theta$  y  $E[S]$ , la tasa de cobro de prima  $c$  será una constante una vez que la aseguradora haya determinado su tarificación.

Tómese ahora la variable aleatoria:

$$1 + \hat{\theta} = (1 + \theta) \frac{\hat{\lambda} \hat{\beta}_1}{\lambda \beta_1} \quad (4.1)$$

donde  $\hat{\lambda}$  y  $\hat{\beta}_1$  son los estimadores de la tasa del proceso y del valor esperado de los siniestros agregados, respectivamente.  $\theta$  es el recargo de seguridad establecido por la aseguradora en consideración a estos valores estimados.

En caso de que

$$\hat{\theta} \sim \text{Normal}(\nu, \tau^2) \quad (4.2)$$

el comportamiento de la reserva  $R(t)$  dependerá ahora de las propiedades de  $\hat{\theta}$ , en particular

$$E[R(t)] = u + \lambda t p_1 E[\hat{\theta}] = u + \lambda t p_1 \nu \quad (4.3)$$

y

$$\text{Var}[R(t)] = E_{\hat{\theta}} \{ [R(t) - ER(t)]^2 | \hat{\theta} \} \quad (4.4)$$

$$\text{Var}[R(t)] = E_{\hat{\theta}} \{ E[R(t) | \hat{\theta}] - ER(t) \}^2 + \left\{ E_{\hat{\theta}} E \{ [R(t) - E[R(t) | \hat{\theta}]]^2 | \hat{\theta} \} \right\} \quad (4.5)$$

$$\text{Var}[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \text{Var}[\hat{\theta}] + E_{\hat{\theta}}[\lambda t p_2] = (\lambda t p_1)^2 \tau^2 + \lambda t p_2 \quad (4.6)$$

que también se puede reexpresar como

$$\text{Var}[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \left[ \tau^2 + \frac{p_2}{p_1^2} \frac{1}{\lambda t} \right] \quad (4.7)$$

Y esta última expresión muestra claramente el efecto de permitir alguna dispersión de  $\hat{\theta}$ , pues si  $\tau^2 = 0$  (no variabilidad), entonces (4.7) indica que:

$$\text{Var}[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \left[ \tau^2 + \frac{p_2}{p_1^2} \frac{1}{\lambda t} \right] = (\text{Prima de riesgo})(\text{constante})(1/\text{ siniestros esperados al tiempo } t) \quad (4.8)$$

Es decir,  $\{\text{Var}[R(t)]\}^{1/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  en proporción a la prima de riesgo. (4.9)

Cuando  $\tau^2 \neq 0$ , se tiene que

$$\{\text{Var}[R(t)]\}^{1/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tau \text{ en proporción a la prima de riesgo.} \quad (4.10)$$

(4.9) y (4.10) indican que en el largo plazo la incertidumbre asociada a  $\hat{\theta}$  causa un incremento dramático en el riesgo del proceso de seguro. También muestra por qué es tan rápida la convergencia de las probabilidades de ruina en tiempo finito hacia la ruina eventual.

(4.7) indica además que: Conforme el tamaño del portafolio de pólizas se incrementa, en el corto plazo causará una disminución en el riesgo asociado a la reserva  $R(t)$  causado por un incremento en el número esperado de siniestros. Pero en el largo plazo, este efecto será compensado por el riesgo asociado a la incertidumbre de  $\hat{\theta}$ .

Esta incertidumbre  $\tau$  sobre  $\hat{\theta}$  puede generarse de múltiples fuentes. Una de ellas es la fluctuación aleatoria en la intensidad  $\lambda$  del proceso. En cambio la fluctuación determinística únicamente afecta la escala de tiempo y no contribuye al valor de  $\tau$ . En caso de que la intensidad sea modelada por una serie de tiempo, que contiene tanto una tendencia como un componente aleatorio, entonces el componente aleatorio sí afectará a  $\tau$ .

## 1.2 Efecto de siniestros ocurridos y no reportados

El impacto de este tipo de siniestros fue comentado en la sección 3.1 del capítulo 2. La expresión (2.20) descompone el efecto sobre el resultado financiero del asegurador en sus componentes relevantes. De acuerdo con esta ecuación, la varianza del impacto de las reclamaciones en el periodo  $t$  es:

$$Var[S(t)] = Var[I_t] + Var[\hat{I}_t(t+1) - I_t] + Var\left\{\sum_{j=1}^{\infty} [\hat{I}_{t-j}(t+1) - \hat{I}_{t-j}(t)]\right\} + covarianza \quad (4.11)$$

y esta varianza afecta la incertidumbre de las utilidades del asegurador en un periodo determinado, afectando por ende a la solvencia.

La forma común de incluir este efecto es considerar a los términos posteriores a  $I_t$  en (2.20) como una adición o deducción sobre el recargo de seguridad y por tanto, los términos posteriores a  $Var[I_t]$  en (4.11) son incorporados a la incertidumbre  $\tau$  de ese recargo de seguridad. Así si el intervalo  $(0, t]$  consiste de un número entero de periodos  $0, 1, \dots, t-1$ , entonces (4.11) se vuelve:

$$Var[S(t)] = Var\left[\sum_{k=0}^{t-1} \hat{I}_k\right] + Var\left[\sum_{k=0}^{t-1} [\hat{I}_k(t) - I_k]\right] + Var\left\{\sum_{j=1}^{\infty} [\hat{I}_{-j}(t) - \hat{I}_{-j}(0)]\right\} + covarianza \quad (4.12)$$

Y sólo aquellos términos que involucran a los periodos  $-1, -2, \dots$  se relacionan con los siniestros que ocurrieron en periodos anteriores y que aún no son pagados, así que los denotaremos junto con sus términos en la covarianza como  $Var[S'(t)]$  y la contribución de esta varianza a  $\tau^2 = Var[\hat{\theta}]$  (4.6) será  $\frac{Var[S'(t)]}{(\lambda tp_1)^2}$ . (4.13)

## 2. Probabilidades de ruina a corto plazo y Márgenes de Solvencia

Normalmente los criterios de solvencia aplicables a las empresas de seguros incluyen la revisión periódica y a corto plazo de los valores que definen a dicha solvencia. De este modo, los márgenes deben ser suficientes para garantizar que la compañía se mantendrá solvente hasta la siguiente revisión. Por ello es de gran utilidad obtener expresiones útiles para la probabilidad de ruina a corto plazo y a partir de este concepto incluir las fuentes de incertidumbre discutidas al principio de este capítulo, para aproximarla más al concepto de solvencia.

### 2.1 Recargo de seguridad conocido y Probabilidad de ruina a corto plazo

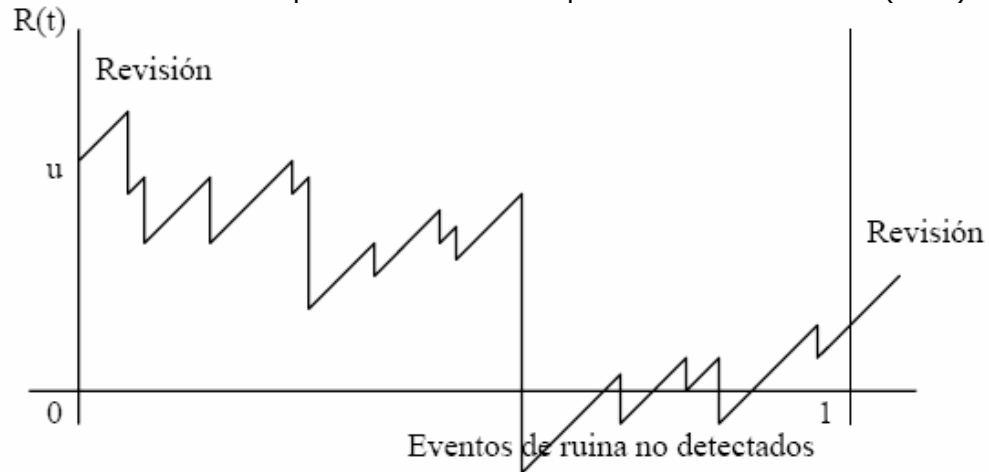
Para obtener una adecuada aproximación de  $\psi(u, t)$  para  $t$  relativamente pequeño, recuérdese que la función de distribución de los siniestros agregados pagados sobre el intervalo  $(0, t]$  es la función Poisson compuesta (3.6). Así que un asegurador con nivel inicial de reservas  $u$  y una tasa de cobro de prima  $c$  por unidad de tiempo, tendrá al final del periodo  $(0, t]$  una reserva  $R(t)$  dada por (3.12), con distribución de siniestros agregados (3.6).

Ahora bien, una condición suficiente para el evento de ruina es que  $R(t) < 0$ , pero no es una condición necesaria, puesto que es posible que aunque la ruina ocurra dentro del periodo, el asegurador aporte recursos para que  $R(t) \geq 0$ , así que

$$\psi(u, t) > Pr[R(t) < 0] = Pr[S(t) > u + ct] = 1 - F_{S(t)}(u + ct) \quad (4.14)$$

Figura 4.1

Una realización del proceso de reserva que muestra la relación (4.14)



Y ya se ha discutido ampliamente la forma de cálculo de la distribución de siniestros agregados, incluyendo sus aproximaciones. Como se mostró en el capítulo 2, la aproximación normal es deficiente en las colas de  $F_{S(t)}(s)$ , pero un intervalo suficientemente alrededor de la media, permite obtener expresiones muy simples para fines prácticos. Así que<sup>23</sup>

$$\psi(u, t) \approx 1 - N\left(\frac{u + ct - \lambda tp_1}{\sqrt{\lambda tp_2}}\right) \quad (4.15)$$

y como  $ct = \lambda tp_1(1 + \theta)$

$$\psi(u, t) \approx 1 - N\left(\frac{u + \theta \lambda tp_1}{\sqrt{\lambda tp_2}}\right) \quad (4.16)$$

Así que el monto de capital que garantice una probabilidad de insolvencia no mayor a un  $\varepsilon\%$  sobre el intervalo  $(0, t]$  será

$$u = \xi_{1-\varepsilon} \sqrt{\lambda tp_2} - \theta \lambda tp_1 \quad (4.17)$$

donde  $\xi_{1-\varepsilon}$  es el percentil  $1-\varepsilon$  de la distribución normal estándar y  $u$  es llamado el margen de solvencia.

Aunque en (4.15)-(4.17) se esté utilizando la aproximación normal, el lector puede fácilmente aplicar todas las aproximaciones vistas en el capítulo 2.

<sup>23</sup> N denota la distribución normal estándar.

## 2.2 Incertidumbre sobre el recargo de seguridad y Probabilidad de ruina a corto plazo

Ahora bien, la probabilidad de ruina y el margen de solvencia deben ser modificados para permitir la incertidumbre en el recargo de seguridad  $\hat{\theta}$  de acuerdo con (4.2). Solamente es necesario ajustar los momentos de  $S(t)$  para reconocer a (4.3) y (4.7) y obtener

$$\psi(u, t) \approx 1 - N\left(\frac{u + \lambda t p_1 v}{\sqrt{(\lambda t p_1)^2 t^2 + \lambda t p_2}}\right) \quad (4.18)$$

y es interesante notar que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\psi(u) \rightarrow N\left(\frac{v}{\tau}\right) \quad (4.19)$$

Lo cual refleja lo comentado al inicio de este capítulo: Sobre intervalos cortos de tiempo, la variación en las reservas estará dominada por las fluctuaciones aleatorias en el monto de las reclamaciones pagadas, pero sobre intervalos mayores, el mayor componente de la variación será el riesgo acumulado de las pólizas con un recargo de seguridad desconocido.

Además se puede establecer un margen de solvencia (capital inicial) requerido para reducir el riesgo de insolvencia a un  $\varepsilon\%$  en el intervalo  $(0, t]$  análogo a (4.17):

$$u = \lambda t p_1 \left\{ \xi_\varepsilon \sqrt{\tau^2 + \frac{p_2}{p_1^2} \frac{1}{\lambda t}} - v \right\} \quad (4.20)$$

o cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

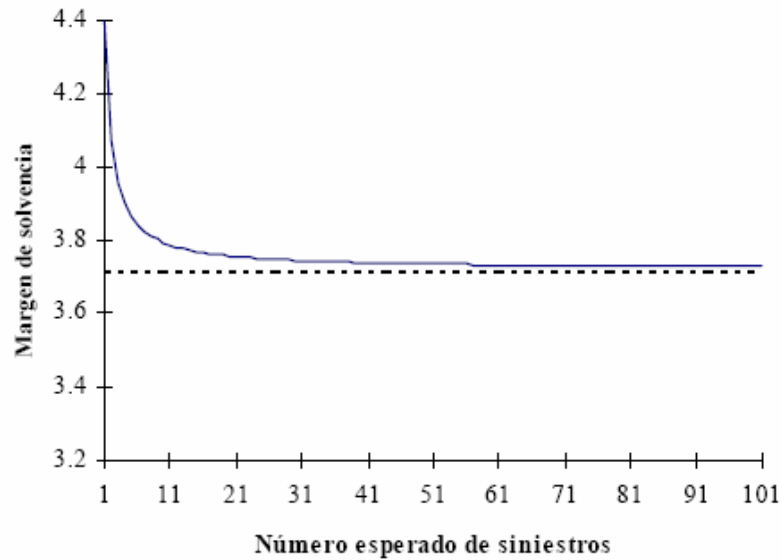
$$u = (\xi_\varepsilon \tau - v) \mathcal{O}(\lambda t p_1) \quad (4.21)$$

Y este margen de solvencia (4.20) tiene propiedades notables:

- Para cualquier tipo de seguro o combinación de éstos, el margen expresado como porcentaje de las primas disminuye monótonamente conforme el portafolio de pólizas se incrementa. Esto coincide con los estándares de solvencia internacionales, como los de la Comunidad Económica Europea.
- Sin embargo (4.21) muestra que dicha disminución tiene un límite sobre el cual los incrementos en el tamaño del portafolio no tienen efecto.

Figura 4.2

Margen de solvencia  $\frac{u}{\lambda t p_1}$  en función de  $\lambda t$  para  $v = 0.2$ ,  $\tau = 2$  y sesgo de  $X=1.5$



- c) En el caso de portafolios suficientemente pequeños, el tamaño es muy relevante, y el margen expresado como porcentaje de las primas variará con cada tipo de seguro y tamaño del portafolio, incrementándose conforme la distribución de siniestros agregados se vuelve más sesgada.
- d) Por último, el margen de solvencia variará conforme a los márgenes de utilidad de las tarifas en el futuro inmediato. Es sobre este punto que aparecen dificultades para la autoridad reguladora, pues usualmente no se podrá expresar alguna opinión sobre  $v$ . Así que resulta prudente expresar los márgenes de solvencia legales (4.20) y (4.21) eliminando  $v$ .

La siguiente tabla ilustra estas observaciones. En ella se calcula el margen de solvencia en proporción de la prima actuarial, es decir,  $u/\lambda t p_1$ .

Margen de Solvencia en porcentaje de la Prima Actuarial  $\lambda p_1$   
Nivel de Confianza 2.5%

Recargo seguridad  $\sim$  Normal(0.2,0.05)

$E[N(t)] = \lambda_t$	$p_2/p_1^2$					
	1.5	10	20	30	50	100
1000	0.00	0.02	0.09	0.15	0.25	0.43
10000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Recargo seguridad  $\sim$  Normal(0.02,0.2)

$E[N(t)] = \lambda_t$	$p_2/p_1^2$					
	1.5	10	20	30	50	100
1000	0.38	0.42	0.46	0.50	0.57	0.71
10000	0.37	0.38	0.38	0.39	0.40	0.42
100000	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.38

Recargo seguridad  $\sim$  Normal(0.2,0.05)

$E[N(t)] = \lambda_t$	$p_2/p_1^2$					
	1.5	10	20	30	50	100
1000	0.00	0.02	0.09	0.15	0.25	0.43
10000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Recargo seguridad  $\sim$  Normal(0.02,0.2)

$E[N(t)] = \lambda_t$	$p_2/p_1^2$					
	1.5	10	20	30	50	100
1000	0.38	0.42	0.46	0.50	0.57	0.71
10000	0.37	0.38	0.38	0.39	0.40	0.42
100000	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.38

Obsérvese que para seguros donde la distribución contiene una cola muy pesada a la derecha, el volumen de reclamaciones necesita ser muy grande para que la incertidumbre sobre el recargo de seguridad sea dominante.

### 3. Riesgo sistemático y no sistemático

En este capítulo se ha mostrado que la estimación que realiza el asegurador sobre el recargo de seguridad es de hecho un valor sujeto a la incertidumbre y ésta es heredada a la fluctuación de las reservas. Un modelo un tanto simplista para esta incertidumbre fue expresado en (4.2) y las secciones 1 y 2 muestran las implicaciones, dependientes de la dispersión  $\tau$  del recargo de seguridad estimado  $\hat{\theta}$ .

Obsérvese que la volatilidad de la reserva expresada en (4.7) supone que el recargo de seguridad es el mismo para todos los riesgos cubiertos. Es decir, cualquier variación en  $\hat{\theta}$  está sujeta a (4.2) y afecta a todos los riesgos por igual. Esto es válido para representar la variación de los parámetros de los siniestros agregados, incluyendo siniestros ocurridos y no reportados. Sin embargo, falta representar otros aspectos como los cambios en el tiempo de la distribución de las reclamaciones o la estimación de distribuciones de riesgos catastróficos con datos históricos.

Por analogía con la teoría financiera, denominaremos a la fluctuación representada por (4.2) y (4.7) como riesgo sistemático. La siguiente generalización, en la cual los valores de  $\hat{\theta}$  para cada negocio de seguro son realizaciones independientes de (4.2), será denominada como riesgo no sistemático.

Para este último se utilizará la propiedad de aditividad presentada en 2.3 del capítulo 2. Mediante estas fórmulas se obtiene para un portafolio de  $m$  subportafolios:

$$E[R(t)] = m \left[ \frac{u}{m} + \left( \frac{\lambda}{m} t p_1 \right) v \right] = u + (\lambda t p_1) v \quad (4.22)$$

$$Var[R(t)] = m \left[ \left( \frac{\lambda t p_1}{m} \right)^2 \tau^2 + \frac{\lambda t p_2}{m} \right] = (\lambda t p_1)^2 \frac{\tau^2}{m} + \lambda t p_2 \quad (4.23)$$

Nótese que (4.22) es exactamente (4.3) que corresponde al riesgo sistemático y (4.23) difiere de (4.6) precisamente por el riesgo no sistemático, donde este componente se reduce por un factor igual al número  $m$  de riesgos independientes en el portafolio.

La fórmula análoga a (4.7) es

$$Var[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \left[ \frac{\tau^2}{m} + \frac{p_2}{p_1^2} \frac{1}{\lambda t} \right] \quad (4.24)$$

Lo cual muestra que como en (4.7), la desviación estándar de la solvencia para valores grandes de  $t$  es dominada por los términos proporcionales a la prima de riesgo.

Así que la diferencia entre los riesgos sistemático y no sistemático es que la constante de proporcionalidad se reduce en el último caso por un factor de  $\sqrt{m}$

Para incorporar esta conclusión al modelo general, basta reemplazar la expresión (4.2) por

$$\hat{\theta} \sim Normal\left(v, \tau_{sist}^2, \tau_{no\ sist}^2\right) \quad (4.25)$$

lo cual considera los dos componentes del riesgo, implicando

$$Var[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \left[ \tau_{sist}^2 + \frac{1}{m} \tau_{no\ sist}^2 \right] + \lambda t p_2 \quad (4.26)$$

o bien

$$Var[R(t)] = (\lambda t p_1)^2 \left[ \tau_{sist}^2 + \frac{1}{m} \tau_{no\ sist}^2 \right] + \frac{p_2}{p_1^2} \frac{1}{\lambda t} \quad (4.27)$$

#### 4. Adición de subportafolios

Finalmente se considera el caso en que cada uno de los subportafolios varíen en cuanto a  $\lambda$  y distribución de montos de las reclamaciones. Sin considerar esta posibilidad sería imposible analizar la solvencia de todas las líneas de negocio operadas por las aseguradoras. En esta situación (4.27) debe ser ponderado convenientemente como en la sección 2.3 del capítulo 2 para obtener

$$Var[R(t)] = \overline{(\lambda t p_1)^2} \left[ \tau_{sist}^2 + \frac{1}{m} \tau_{no\ sist}^2 + \frac{\overline{p_2}}{\overline{p_1^2}} \frac{\overline{\lambda}}{\lambda^2} \frac{1}{t} \right] \quad (4.28)$$

Donde la barra denota el promedio sobre los valores de los subportafolios.

Los componentes de esta varianza son:

- Variaciones en los parámetros de riesgo entre riesgos individuales dentro de un subportafolio que es homogéneo sobre los factores detectables del riesgo.
- Variaciones en las estimaciones del asegurador respecto al recargo de seguridad  $\hat{\theta}$ , abarcando los riesgos sistemático y no sistemático.
- Variaciones en la solvencia generadas por cada subportafolio, dados los parámetros de riesgo y el recargo de seguridad.

Bajo esta fórmula generalizada, el margen de solvencia requerido será:

$$u = (\overline{\lambda t p_1}) \left\{ \xi_\varepsilon \left[ \tau_{sist}^2 + \frac{1}{m} \tau_{no\ sist}^2 + \frac{\overline{p_2}}{\overline{p_1}^2} \frac{\overline{\lambda}}{\lambda^2} \frac{1}{t} \right]^{1/2} v \right\} \quad (4.29)$$

y para  $t \rightarrow \infty$

$$u = \left( \xi_\varepsilon \left[ \tau_{sist}^2 + \frac{1}{m} \tau_{no\ sist}^2 \right]^{1/2} v \right) O(\overline{\lambda t p_1}) \quad (4.30)$$

Por lo señalado en 2.2 de este capítulo, también resulta conveniente eliminar el término  $v$  para el establecimiento legal de los márgenes de solvencia. Pero en el caso de que un asegurador en el pasado reciente haya cobrado primas inadecuadas, entonces el término  $v$  (que será negativo) deberá incluirse en el margen de solvencia.

## Capítulo 5

### Supervisión actuarial de la solvencia

El margen de solvencia óptimo debe mantener un equilibrio entre seguridad, presiones del Mercado, primas y expectativas de los accionistas. La teoría de los cuatro capítulos anteriores expone consideraciones esenciales desde el punto de vista actuarial que permiten tanto a los administradores de las empresas de seguros como a las autoridades encargadas de la supervisión una herramienta muy importante con la cual establecer los criterios para mantener dicho equilibrio.

A continuación se mostrará la aplicabilidad de la técnica y algunas consideraciones adicionales en su implementación.

#### 1. Consideraciones Adicionales

##### Sobre el efecto del reaseguro

El reaseguro tiene un impacto fundamental sobre la solvencia de una empresa de seguros, permite modificaciones esenciales sobre la distribución de los montos de las reclamaciones, en particular sobre el sesgo, que es uno de los factores que mayor influencia ejerce sobre la probabilidad de insolvencia. En el modelo de reserva del capítulo 3, únicamente se requiere modificar la distribución del monto de las reclamaciones y la tasa de recolección de prima, para tener una visión completa del efecto de este elemento.

Obviamente el reasegurador proveerá la protección necesaria sólo si permanece solvente. Hasta este punto toda la exposición considera que la responsabilidad del reasegurador será cumplida con toda certeza. Las distribuciones de los montos de las reclamaciones pueden ser separados en dos componentes:

$$S(t) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i^{reaseg} \text{ con probabilidad } (1 - \psi^{reaseg}) \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \text{ con probabilidad } \psi^{reaseg} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Donde  $X_i^{reaseg}$  es el monto de la reclamación que incluye el efecto del reaseguro, la cual ocurrirá con una probabilidad de solvencia del asegurador igual a  $1 - \psi^{reaseg}$  y  $X_i$  es el monto íntegro de la reclamación, del que tendrá que responsabilizarse la aseguradora en caso de insolvencia del reasegurador, con probabilidad  $\psi^{reaseg}$ .

Este enfoque, sin embargo, no parece una alternativa práctica pues convierte a la distribución de siniestros agregados en un modelo poco tratable matemáticamente, aunque los momentos de dicha distribución pueden ser incluidos en las fórmulas del capítulo anterior. Además se requiere de una estimación de la probabilidad de insolvencia del reasegurador, lo cual tampoco sería factible en términos prácticos. Por esta razón es un criterio común internacionalmente el no realizar ningún ajuste a causa de este factor, pero manteniendo una vigilancia estrecha sobre la reputación de los reaseguradores involucrados.

## Relevancia en las decisiones de inversión

Este trabajo se ha concentrado en establecer criterios de solvencia con base en el grado de fluctuación de las reservas sin referencia explícita a las políticas y decisiones de inversión de la aseguradora. El valor estimado de las obligaciones al inicio de un periodo, más el margen de solvencia, definen un mínimo de activos requeridos al inicio del periodo, considerando el efecto de que las obligaciones surgirán durante el periodo.

Los activos valuados como  $u$  al tiempo cero, cambiarán su valor durante  $(0, t]$  y estos cambios deben ser añadidos a las fórmulas del capítulo anterior. Particularmente hay dos efectos:

- a) La mayor parte de los activos generarán un ingreso, que generalmente lleva a un incremento en los activos netos de la empresa.
- b) La mayor parte de los activos están sujetos a la fluctuación por precios de mercado.

La forma de incorporar esta variabilidad en el margen de solvencia es considerando ahora un proceso estocástico adicional,  $\{u(t)\}$  que denota el valor de los activos. Si suponemos que este proceso es independiente del proceso de las reclamaciones, entonces su varianza puede agregarse a las fórmulas del capítulo anterior. Esta independencia es perfectamente razonable.

## Efecto de los gastos

Uno de los cambios necesarios para pasar del concepto de ruina al de solvencia es la inclusión de los gastos. Esto se logra, por un lado, afectando al recargo de seguridad para incluir los gastos de venta y administración y por otro, asignando en el tiempo los gastos conforme se generan, lo cual debe ser para la empresa una labor que no genere gran incertidumbre. En todo caso, puede nuevamente asumirse (como lo indica el sentido común) que esta fuente de variabilidad es independiente del proceso de reclamaciones, por lo cual significaría un componente adicional del margen de solvencia.

## Efecto del tiempo en que se realiza la supervisión

La supervisión generalmente consta de tres etapas:

- a) Recopilación de información por parte de los aseguradores.
- b) análisis de los resultados por parte de las autoridades.
- c) implementación de las decisiones de la autoridad en consideración al análisis realizado.

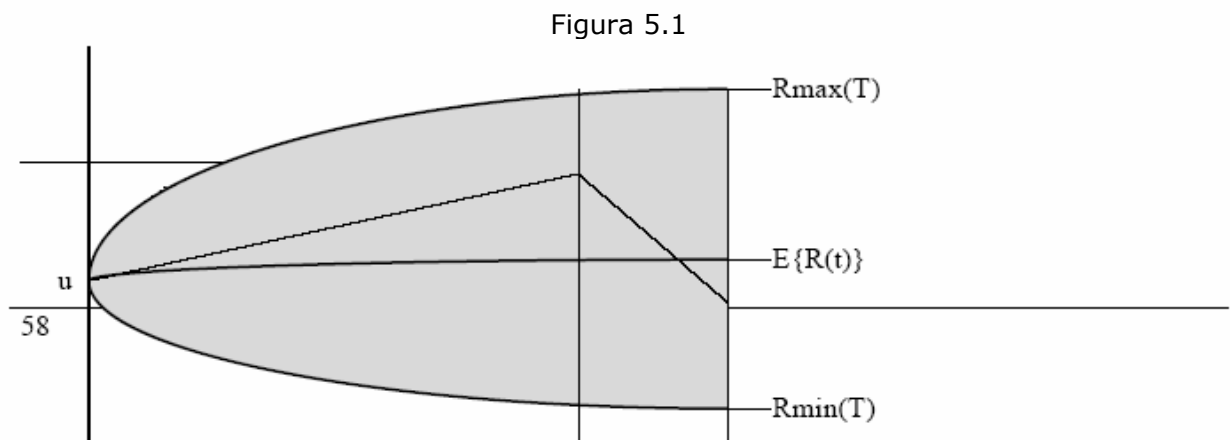
En ocasiones este proceso puede tomar un tiempo considerable y agravar una situación de inminente insolvencia. El reporte periódico de los estados financieros es una práctica común y recomendable para detectar oportunamente la necesidad de un análisis de solvencia antes de que sus efectos sean difícilmente corregibles.

## 2. El proceso de supervisión periódica por parte de las Autoridades

### Reguladoras<sup>24</sup>

Si se muestra que el asegurador puede mantener su capacidad económica hasta el siguiente periodo, dada una probabilidad, se considerará solvente. En caso contrario, las autoridades tienen capacidad y obligación de aplicar medidas correctivas o incluso suspender las actividades de la empresa.

Este criterio es mostrado en la siguiente gráfica:



Toda realización de  $R(t)$  se inicia en  $t=0$ , que es el instante en que se realiza la supervisión y por ello  $u$  debe ser al menos el mínimo legal aceptable. Posteriormente, el margen fluctúa hasta la siguiente revisión en  $t_0$ , pudiendo tomar cualquier valor (incluyendo negativos) en ese intervalo.

Una vez realizada la revisión, cualquier corrección entraría en vigor con posterioridad a  $t_0$ , digamos al tiempo  $T$ . Por ello la idea es establecer en  $t=0$  un margen de solvencia tal que, con una probabilidad  $1-\varepsilon$ , el proceso se encuentre al tiempo  $T$  dentro del intervalo  $[Rmin(T), Rmax(T)]$ .

Este intervalo se calcula mediante las fórmulas vistas en el capítulo anterior, principalmente (4.29) y (4.30). En ellas por lo general se consideran distribuciones de siniestros agregados y tasas de recolección de primas estimadas con información agregada de todo el Mercado asegurador. El horizonte de tiempo  $T$  es generalmente mayor que un año, para permitir la revisión anual del proceso y el tiempo suficiente para la intervención oportuna de las autoridades o del supervisor de la propia empresa.

Así, en caso de que  $u$  se encuentre por arriba del mínimo legal, pero  $R(t_0)$  se encuentre por debajo de  $Rmin(t_0)$ , será necesario aplicar medidas correctivas de inmediato, inclusive suspendiendo la captación de nuevos negocios hasta que el margen se encuentre dentro de los límites preestablecidos.

<sup>24</sup> Basado en Pentikäinen.

El valor  $R_{max}(t)$  es también de gran importancia, pues permite al administrador de la empresa determinar sus políticas de dividendos, ya que valores grandes de este proceso significan utilidad, aunque parte de ella tenga que ser retenida para mantener los márgenes de solvencia dentro del criterio arriba presentado.

Recuérdese que la sobrevivencia de la empresa en el largo plazo es considerada la meta fundamental de los administradores de la empresa. En esta sección únicamente se ha expuesto un procedimiento de corto plazo que garantiza en ese periodo la solvencia del asegurador. La legislación de solvencia es pues, un requisito para proteger a los asegurados y accionistas, no al asegurador.

Según los equipos de investigación sobre solvencia de Finlandia y Gran Bretaña<sup>25</sup> el periodo de supervisión usual de un año es muy corto para permitir la intervención oportuna de las autoridades en casos de fluctuaciones adversas. Se propuso así un periodo de 18 meses a 2 años para permitir un margen adecuado. Esto afecta considerablemente el margen de solvencia, pues como se muestra en la figura 5.1 y en la fórmula (4.29) la amplitud del intervalo se incrementa en función del tiempo. Por ejemplo en Beard et al (1984) p.280, se muestra que si  $R_{min}$  se establece como 100 para  $T=12$  meses, será alrededor de 120-130 para  $T=18$  meses y de 140-160 para  $T=24$  meses.

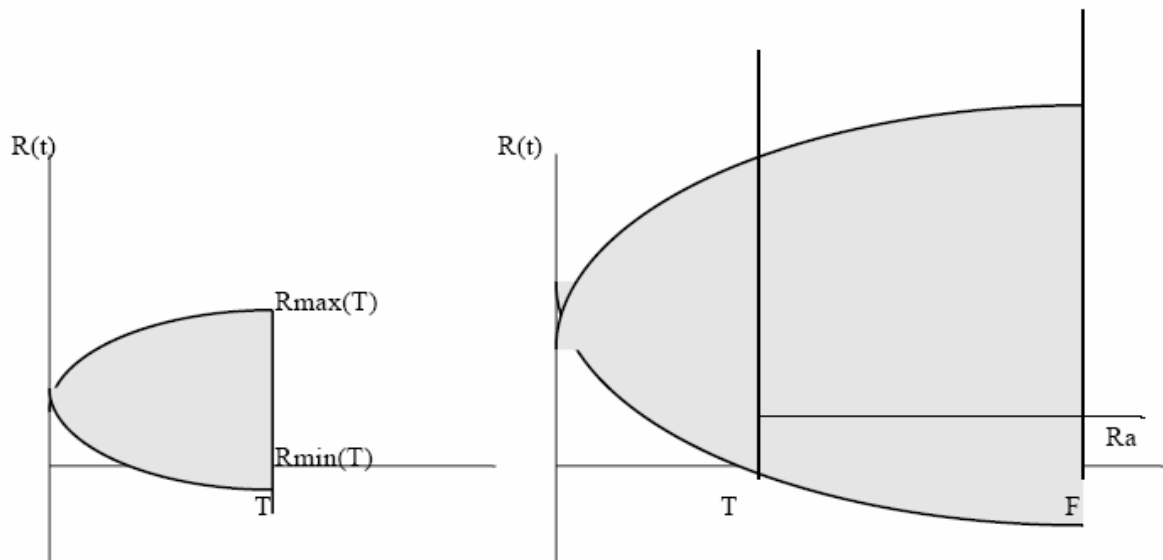
Ahora bien, en el establecimiento de esta supervisión falta incluir los criterios de solvencia dinámica y estática:

En el enfoque de solvencia dinámica, la autoridad verifica solamente si el mejor estimando de los activos excede al mejor estimado de los pasivos al final del periodo  $T$ . Esto normalmente asume que las actividades del asegurador continuarán durante este periodo, incluyendo la emisión de más pólizas y el pago de indemnizaciones correspondientes a periodos anteriores. Por el contrario, la solvencia estática puede interpretarse como suponer que la licencia del asegurador será revocada en  $T$ , y no podrán emitirse nuevos negocios a partir de ese momento ni renovarse los existentes. Las reclamaciones y otras obligaciones serán ejercidas y pagadas con los activos. Y estos activos continuarán invirtiéndose hasta que sean utilizados para este efecto. Con esta última consideración todavía existirán con posterioridad a  $T$  reclamaciones provenientes de los periodos anteriores (por ejemplo los siniestros ocurridos y no reportados), por lo cual con este criterio de solvencia estática, se añade el riesgo de estas fluctuaciones ( $R_a$ ) y entonces el margen de solvencia debe reconocerlo. En la siguiente figura se ilustran los dos principios.

---

<sup>25</sup> Pentikäinen ob. cit.

Figura 5.2  
Diferencias entre los criterios de solvencia dinámica (izquierda) y estática (derecha)



Los criterios de solvencia dinámica parecen prevalecer en la mayoría de los países<sup>26</sup> aún antes de haberse formalizado en la literatura. El estudio británico de solvencia concluyó que a causa de los riesgos sobre siniestros pendientes de indemnizar, cuando el riesgo de ruina es significativo, no habrá garantías de transferencia de los portafolios de pólizas hacia otros aseguradores y por ello, la solvencia dinámica es insuficiente.

### 3. Supervisión actuarial mediante consideraciones de largo plazo

Como se explicó en la sección anterior, los criterios de solvencia de largo plazo son de mayor interés para la administración de la empresa de seguros que para la autoridad reguladora. Más aún, de acuerdo con las hipótesis básicas en la Administración, el enfoque de solvencia dinámica parece más adecuado a los intereses de la empresa. Las implicaciones de esto son relevantes, pues significa que los márgenes de solvencia legales, aplicados con los mismos datos de la aseguradora, serán en general superiores a los calculados por las propias empresas. En algunos países, las reservas para siniestros ocurridos y no reportados (parte más importante de los siniestros aún no indemnizados) no son considerados formalmente en el margen de solvencia, pero para efectos del administrador, forman una sola entidad.

El problema para el asegurador puede plantearse de la siguiente forma:

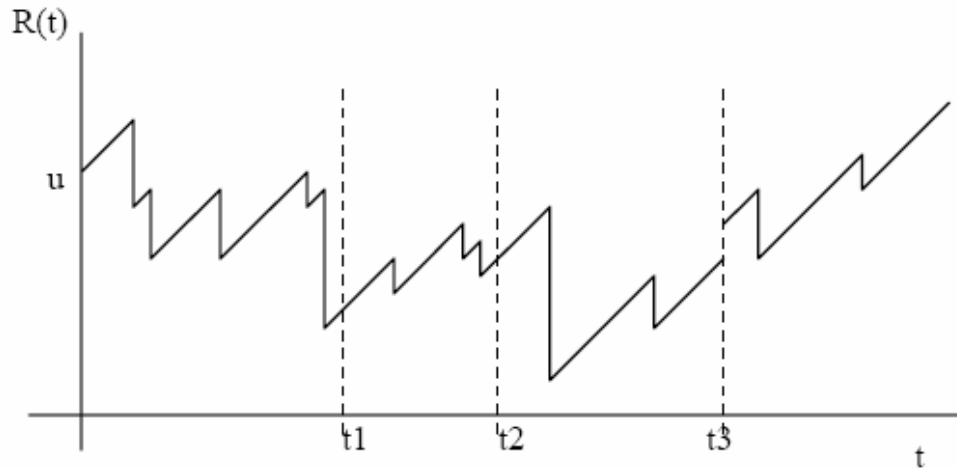
El asegurador observa una realización del proceso de reserva  $R(t)$  que considera tanto el margen de solvencia inicial del periodo como las primas y siniestros agregados hasta ese momento.

En un instante  $t_2$  el asegurador desea conocer el valor de la solvencia, pero esto en la práctica es difícil de obtener. En realidad se dispone de información con algún retraso (un mes, por ejemplo), así que el asegurador conocerá el valor de la solvencia en  $t_1 < t_2$ , es decir  $R(t_2)$ .

<sup>26</sup> ibidem. p.400.

Más aún, una vez analizada la información, cualquier decisión concerniente a las primas, reaseguro, aportación de capital o pago de dividendos, tomará efecto un tiempo después,  $t_3 > t_2$ . Este tiempo puede ser considerablemente largo (algunos meses) y definitivamente debe ser tomado en cuenta. La figura 5.3 ilustra esta idea.

Figura 5.3  
El problema de solvencia para el asegurador



En otras palabras, el asegurador desconoce los valores reales del proceso en  $[t_1, \infty)$ , pero debe tomar una decisión en  $t_2$  que entrará en vigor hasta  $t_3$  y que debe garantizar la viabilidad del negocio más los requisitos legales establecidos.

Una alternativa para esta situación consiste en pronosticar  $R(t_3)$  mediante la tendencia del proceso en ese intervalo:

$$R(t_1) + (1 + \theta)\lambda p_1(t_3 - t_1) - E[S(t_3 - t_1)] \quad (5.2)$$

$$R(t_1) + (1 + \theta)\lambda p_1(t_3 - t_1) - \lambda p_1(t_3 - t_1) \quad (5.3)$$

$$R(t_1) + \theta \lambda p_1(t_3 - t_1) \quad (5.4)$$

y sobre este valor se puede determinar, en  $t_3$ , el capital adicional o las primas a modificar para garantizar una probabilidad de insolvencia  $\varepsilon$  preestablecida:

$$\Psi(R(t_3)) \leq \varepsilon \quad (5.5)$$

Otra alternativa consiste en utilizar las fórmulas del tipo de (4.29) o un proceso de simulación para pronosticar por intervalo el valor de la reserva en ese momento y tomar las decisiones pertinentes. Nótese que se está suponiendo una estabilidad de condiciones sobre el recargo de seguridad y la distribución de siniestros agregados.

Esto puede modificarse de acuerdo con lo visto en el capítulo 4. Para el cálculo de estas probabilidades de insolvencia, se puede recurrir a la teoría del capítulo 3.

## Observaciones Finales:

En este trabajo introductorio se ha mostrado que la Teoría de Riesgo es la herramienta básica para el tratamiento de la solvencia de empresas de seguros. Como toda ciencia de reciente formación, aún quedan muchos elementos por perfeccionar, en particular, la adición de consideraciones de carácter financiero y económico que afectan a la empresa de seguros, sin los cuales esta teoría quedaría fuera de toda aplicabilidad. Sin embargo, los recientes intentos de los equipos actuariales de investigación en Europa y Estados Unidos han mostrado la necesidad de involucrar a las comunidades actuarial, financiera y económica de todo el mundo en la tarea de formular un modelo único, consistente, teóricamente sustentado y aplicable para la solvencia en seguros, cuyos frutos podrán ser aplicados incluso a otras ramas de la actividad financiera.

## Apéndice A

### Derivación de la distribución Poisson para modelar el número de siniestros

Sea  $N(t)$  el número de reclamaciones en el intervalo  $(0, t]$  con  $t > 0$ . Defínase  $N(0) = 0$ ,  $s > 0$  y  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ . Considerando las hipótesis a, b y c del capítulo 2:

- i) Las variables  $N(t_2) - N(t_1)$  y  $N(t_4) - N(t_3)$  son independientes.
- ii) Las variables  $N(s+t) - N(t)$  y  $N(s)$  tienen la misma distribución.

#### 1. Probabilidad de que no ocurran eventos en un intervalo.

De i) y ii) se tiene:

$$\begin{aligned} Pr\{N(s+t) - N(t) = 0\} &= Pr\{N(s) = 0\} \text{ y} \\ Pr\{N(s+t) = 0\} &= Pr\{N(s) = 0, N(s+t) - N(s) = 0\} \quad (\text{A.1}) \\ &= Pr\{N(s) = 0\} Pr\{N(t) = 0\} \end{aligned}$$

Por tanto,  $Pr\{N(t) = 0\}$  es una función no creciente para toda  $t > 0$ .

El resultado (A.1) implica que para  $s, t$  números racionales:

$$Pr\{N(st) = 0\} = [Pr\{N(s) = 0\}]^t = [Pr\{N(t) = 0\}]^s$$

En particular:

$$[Pr\{N(t) = 0\}]^{1/t} = \text{constante} \leq 1$$

Esta constante no puede ser cero, pues implicaría que  $[Pr\{N(t) = 0\}] = 0$  y por ii) sabemos que cualquier intervalo debe contener alguna reclamación con probabilidad 1 así que el intervalo  $(0, t]$  contendría un número infinito de reclamaciones con probabilidad 1, lo cual contradice la hipótesis c) del capítulo 2.

En consecuencia la constante se puede denotar por  $e^{-\lambda}$ ,  $\lambda \geq 0$  y así

$$Pr\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}, \lambda \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

#### 2. Probabilidad de $n$ siniestros en un intervalo.

Para encontrar una expresión de  $Pr\{N(t) = n\}$  sea  $h$  un entero tal que  $m = 2^h > n$  y considérese la partición del intervalo  $(0, t]$ :

$$I_i = \left( \frac{i-1}{m} t, \frac{i}{m} t \right] \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

Obsérvese que si  $h$  se incrementa, los puntos de la partición anterior siguen siendo puntos en la nueva partición.

Para una  $h$  fija, del conjunto de todas las posibles realizaciones del proceso, se tomarán dos subconjuntos:

$R1_h$ : El conjunto de todas las realizaciones en las que al menos una reclamación ocurre en exactamente  $n$  intervalos  $I_i$ .

$R2_h$ : El conjunto de todas las realizaciones en las que al menos en un intervalo  $I_i$  al menos dos reclamaciones ocurren.

Se puede afirmar que  $\{N(t)=n\} \subset R1_h \cup R2_h$ , pues para que existan exactamente  $n$  reclamaciones se requiere que  $n$  intervalos distintos incluyan una reclamación o que algún intervalo tenga al menos dos reclamaciones. Por otro lado,  $R1_h - R2_h \subset \{N(t)=n\}$  porque  $R1_h - R2_h$  son las realizaciones donde las reclamaciones ocurren en exactamente  $n$  intervalos y en ninguno de ellos hay más de una reclamación.

Por tanto,  $Pr\{R1_h - R2_h\} \leq Pr(N(t)=n) \leq Pr\{R1_h \cup R2_h\}$  es decir,

$$Pr\{R1_h\} - Pr\{R2_h\} \leq Pr(N(t)=n) \leq Pr\{R1_h\} + Pr\{R2_h\} \quad (A.3)$$

Ahora bien, hágase  $h \rightarrow \infty$  y tómesese una realización  $R$ . Hay dos posibilidades:  $R$  es tal que para cierta  $h$  cada intervalo contiene a lo más una reclamación, o bien,  $R$  es tal que independientemente de  $h$  siempre existe al menos un intervalo en el que hay al menos dos reclamaciones.

En esta segunda alternativa, o bien alguna división tiene al menos dos reclamaciones, o bien las reclamaciones presentan un punto de acumulación. Pero esto contradice nuestra hipótesis c) y por ello esta alternativa tiene probabilidad cero.

En consecuencia,  $\lim_{h \rightarrow 0} Pr\{R2_h\} = 0$  y mediante (A.3) tenemos la probabilidad buscada como:

$$Pr\{N(t) = n\} = \lim_{h \rightarrow 0} Pr\{R1_h\}$$

La probabilidad de que en un intervalo  $I_i$  al menos ocurra una reclamación, la cual es fácil de obtener utilizando (A.2):

$$1 - Pr\{N(t/m) = 0\} = 1 - \exp\left[\frac{-\lambda t}{m}\right]$$

Así que la probabilidad de que las  $n$  reclamaciones ocurran en exactamente  $n$  intervalos es:

$$\left(1 - \exp\left[\frac{-\lambda t}{m}\right]\right)^n \left(\exp\left[\frac{-\lambda t}{m}\right]\right)^{m-n}$$

Estos intervalos pueden escogerse de  $\binom{m}{n}$  posibles formas, por lo que:

$$Pr(R1_h) = \binom{m}{n} \left(1 - \exp\left[\frac{-\lambda t}{m}\right]\right)^n \left(\exp\left[\frac{-\lambda t}{m}\right]\right)^{m-n}$$

## Referencias

- Beard R.E. Pentikäinen, T. y Pesonen E., Risk Theory, 1a. Ed., Methuen & Co., London, 1969.
- Beard R.E. Pentikäinen, T. y Pesonen E., Risk Theory, 3a. Ed., Chapman & Hall, London, 1984.
- Borch, K., The Mathematical Theory of Insurance, D.C. Heath and Company, Lexington, 1974.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., et al., Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Itasca, 1986.
- Dufresne, F. y Gerber, H., Three Methods To Calculate the Probability of Ruin, ASTIN Bulletin 19 (1989): 71-91. Embrechts, P. y Veraverbeke, N., Estimates for the Probability of Ruin with Special Emphasis on the Possibility of Large Claims, Insurance: Mathematics and Economics 1(1): 55-72
- Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, Wiley, New York, 1971.
- Frees, E. W., Nonparametric Estimation of the Probability of Ruin, ASTIN Bulletin 16 (1986): 81-90.
- Gerber, H.U. An Introduction to Mathematical Risk Theory, S.S. Huebner Foundation Monograph Series No. 8. Homewood, Irwin, 1979.
- Gerber, H.U. Life Insurance Mathematics, 2nd.Ed., Springer, Heidelberg, 1995.
- Goovaerts, M.J., et. al. Effective Actuarial Methods, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1990.
- Hernández, D. Métodos Combinatorios en la Teoría de Ruina, Tesis de Licenciatura, ITAM, México, 1996.
- Hammersley, J.M. y Handscomb, D.C., Monte Carlo Methods, Chapman & Hall, London, 1979.
- Johnson, N.L., y Kotz, S. Distributions in Statistics, 1. Continuous Univariate Distributions, Wiley, New York, 1970.
- Kauppi, L. y Ojantakanen, P., Approximations of the Generalized Poisson Function, ASTIN Bulletin (1969).
- Pentikäinen T. On the Solvency of Insurers, En Classical Insurance Solvency Theory, Cummins J.D. y R.A. Derrig, eds, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- Ramsay C. M., A Practical Algorithm for Approximating the Probability of Ruin, Transactions of the Society of Actuaries, Vol. XLIV, 1992.

Seal, H. Stochastic Theory of a Risk Business, John Wiley & Sons, New York, 1969.

Taylor G. y Buchanan R. The Management of solvency, En Classical Insurance Solvency Theory, Cummins J.D. y R.A. Derrig, eds., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.

#### Notas

- \* Este Documento obtuvo el Segundo Lugar del Premio de Investigación Sobre Seguros y Fianzas 1997. Las opiniones que aparecen en este artículo son del autor y no necesariamente coinciden con las de la C.N.S.F.